

## مسیرهای فلوتاسیون<sup>۱</sup> و موازنۀ جرم<sup>۲</sup> در مدارهای فلوتاسیون

فلوتاسیون مواد معدنی معمولاً در چند مرحله انجام می شود که هر کدام از مراحل دارای هدف خاصی می باشد. نحسین مرحله فلوتاسیون اولیه و یا پر عیار کنی اولیه<sup>۳</sup> می نامند. هدف اصلی از پر عیار کنی اولیه جدا کردن کانی های آبرانی است که براحتی فلوته می شوند و معمولاً در فلوتاسیون اولیه از یک نیروی متوسط و ضعیف برای شناور سازی استفاده می شود. پس از فلوتاسیون اولیه باطله بدست آمده از مرحله پر عیار کنی را شناور نموده و به این مرحله فلوتاسیون، فلوتاسیون ثانویه یا پر عیار کنی ثانویه و یا رمق گیر<sup>۴</sup> گفته می شود. هدف اصلی در مرحله رمق گیری بازیابی بیشتر (عمق کف کمتر) می باشد. در فلوتاسیون ثانویه از نیروی جدا کننده قویتری نسبت مرحله اولیه استفاده می شود. محصول پر عیار اولیه معمولاً دارای مشخصات مورد نظر نبوده و طی یک و یا چند مرحله دیگر فلوته می شود تا به کیفیت مورد نظر برسد که بع این بخش از عملیات مرحله شستشو<sup>۵</sup> گفته می شود. بسته به کیفیت محصول نهایی، مرحله شستشو ممکن است به ۳ و حتی به ۶ مرحله هم برسد.

در تمامی مراحل فوق الذکر، پالپ از اولین سلول ردیف وارد شده و بعد از انتقال کانی های مورد نظر به کف، پالپ به سلول بعدی سر ریز می شود. بطور کلی هر چه به سلول های نهایی نزدیک تر شویم، مقدار کانی قابل شناور کمتر شده و عمق کف نسبت به سلول های اولیه خیلی کمتر می شود و در مراحل اولیه پر عیار کنی عمق کف بیشتر از مراحل نهایی می باشد. در سلول های آخر معمولاً مواد با خاصیت شناور سازی ضعیف تر شناور می شوند و در سلول های اولیه کانی های آبران و یا کانی هایی با خاصیت شناور سازی بهتر فلوته می گردند. در مراحل رمق گیری معمولاً کانی هایی با درجه آزادی کمتر حضور داشته و به سختی فلوته می گردند. در این مرحله از فلوتاسیون، معمولاً از سلول هایی استفاده می شود که در آنها هوا دمیده می شود و در این سلولها عمق کف کمتر بوده و رنگ کف نسبت به سلول های اولیه روشنتر و کم بارتر می گرددند. سلول ها خود هوا مکش به دلیل کارآیی بالا در سلول های اولیه بکار گرفته می شوند. شستشوی کف در سلول های مرحله نهایی به منظور کاهش گانگ در کنسانتره می باشد. در مرحله پر عیار کنی نهایی درصد جامد کمتر می باشد چون هدف دستیابی به عیار مطلوب می باشد. در شکل های زیر برخی آرایش های مورد استفاده (چیدمان) در صنعت فرآوری مواد معدنی به روش فلوتاسیون بطور شماتیک نشان داده شده است.

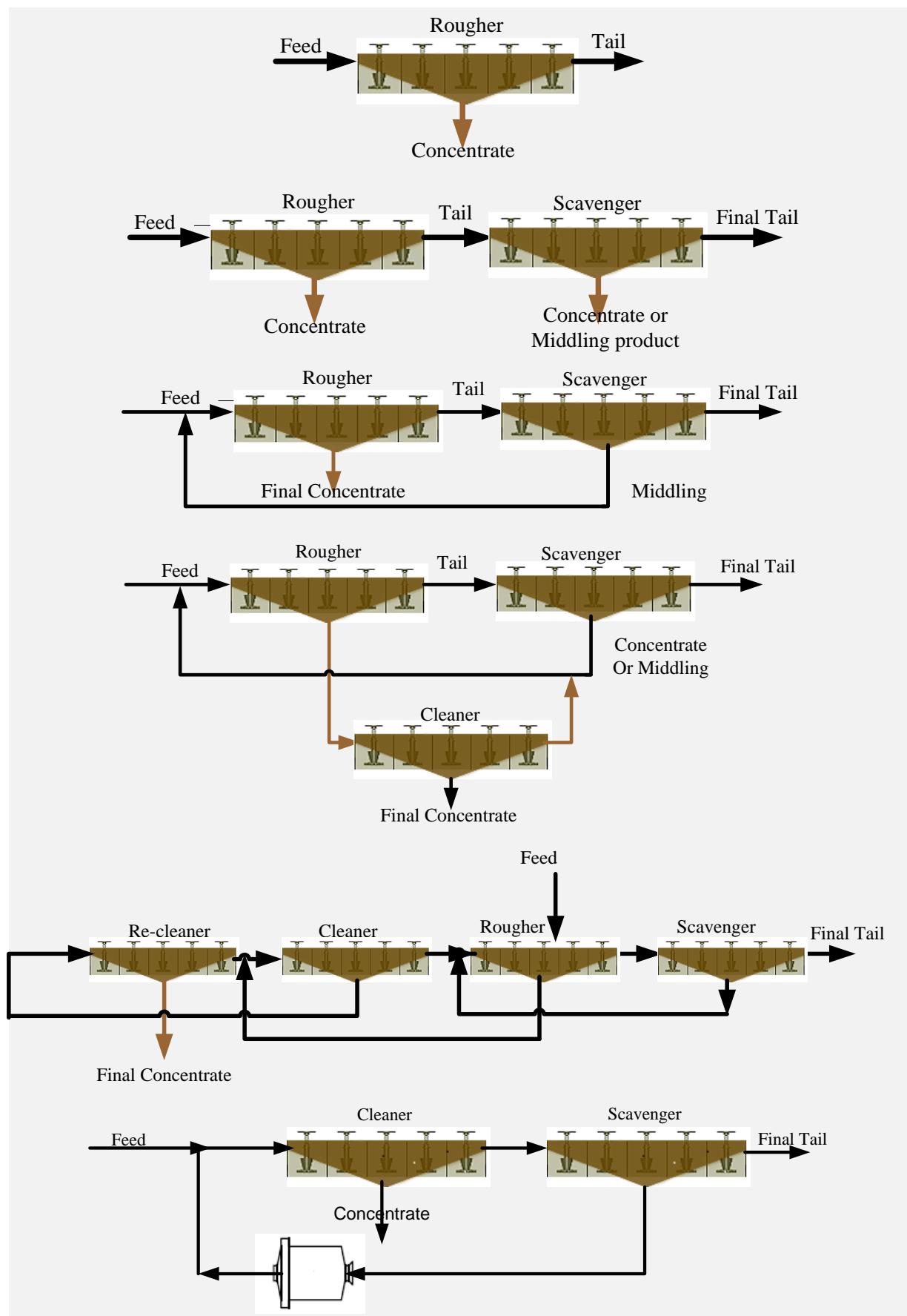
<sup>1</sup> Flotation circuits

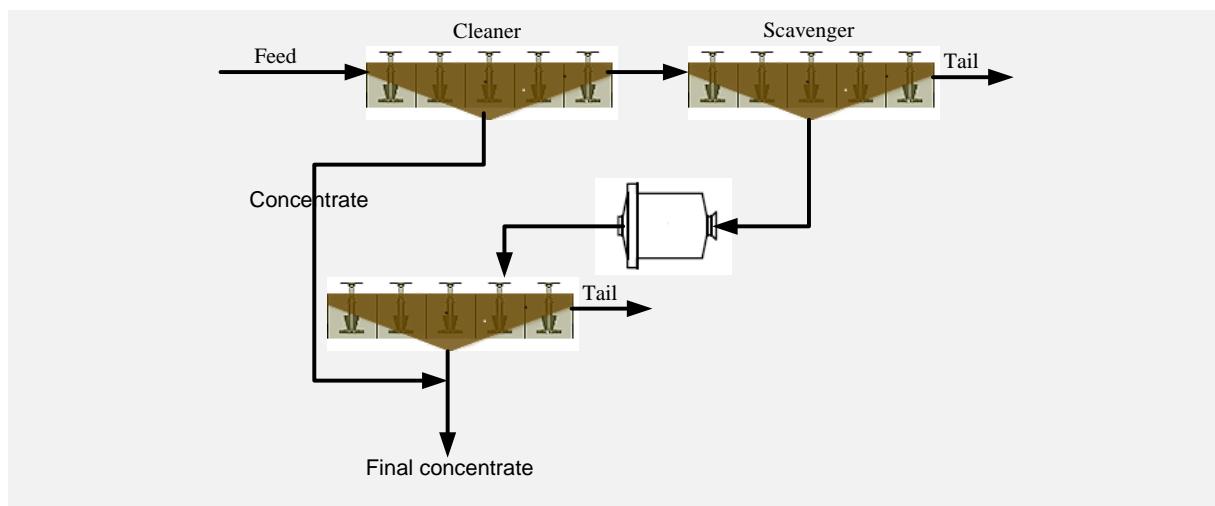
<sup>2</sup> Mass balance

<sup>3</sup> Rougher

<sup>4</sup> Scavenger

<sup>5</sup> Cleaner





شکل ( ) برخی از مدارهای معمول در فرایند فلوتاسیون

برای دستیابی به محصول پر عیار شده و با بازیابی مناسب، خرد کردن سنگ معدنی برای رسیدن به درجه آزادی مناسب همیشه امری ضروری نبوده بلکه میتوان مواد خرد شده اولیه را به سلول های فلوتاسیون انتقال داده و ذرات ازاد شده را شناور و یا در صورت لزوم در سلول های ثانویه شناور و سپس تنها محصول بدست آمده را برای دستیابی به درجه آزادی مناسب خرد نمود. در عملیات فلوتاسیون ذرات خیلی دانه ریز یا نرم<sup>۶</sup> مسایل پیچیده ای از نظر تغییر ویسکوزیته پالپ و دنباله روی و ... ایجاد می کنند. لذا در بیشتر موارد بخش نرمه بایستی از خوراک فلوتاسیون جدا شود. حد جدایش بین بخش دانه ریز و دانه درشت معمولاً بین 10 تا 40 میکرون می باشد. عملیات نرمه گیری معمولاً توسط هیدروسیکلون و گاهی هم با ترکیبی از دو روش فلکولاسیون انتخابی و نرمه گیری صورت می گیرد. در مدارهای فلوتاسیون گاهی از تیکرها هم برای تنظیم درصد وزنی جامد نیز استفاده می شود.

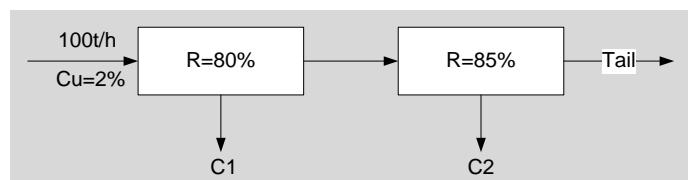
همانطور که از مفاهیم سینیتیک فلوتاسیون هم استنباط میشود، تا آنجا که ممکن است از تعداد بیشتری سلول با حجم کوچک تر در مدارهای فلوتاسیون استفاده شود. از طرفی بررسی های فنی و اقتصادی نشان میدهد که حتی المقدور از تعداد کمتری سلول با حجم بزرگتر در طراحی مدارهای فلوتاسیون استفاده گردد. لذا تعداد سلول ها را بایستی طوری طراحی و انتخاب نمود که هر گز کمتر از 4 عدد نباشد. تعداد معمول آنها 8 تا 10 عدد می باشد. البته در برخی مدارهای با توجه به ظرفیت و نحوه جدایش امکان دارد که تعداد آنها به 16 و حتی به 20 هم افزایش یابد.

## محاسبه بازیابی در مدارهای فلوتاسیون

<sup>6</sup> Slime

با توجه به اینکه بازیابی کانی های با ارزش در چندین سلول و در چندین مرحله انجام می شود، محاسبه بازیابی بایستی با در نظر گرفتن تمامی مراحل و نحوه انتقال و جابجایی مواد در سلول ها و با توجه به سهم هریک از انها صورت گیرد. که برای آشنایی بیشتر با چنین مدار هایی چندین مثال ساده در ابتدا برای یادگیری بیشتر تشریح گردیده است.

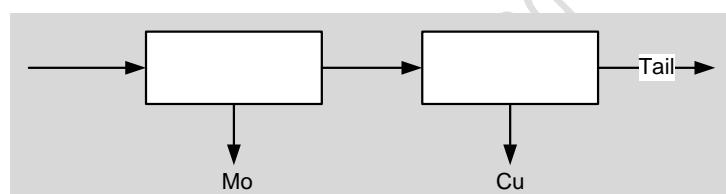
مثال 1: در مدار زیردو کنسانتره مس تولید می شود. مطلوبست محاسبه بازیابی کل مدار و دبی مس در محصولات کنسانتره؟



$$R_t = (0.8 + 0.85(1 - 0.8)) \times 100 = 97\%$$

$$R_t 100 \times 0.97 \times 0.02 = 1.94t/h$$

مثال 2: سنگ معدنی حاوی 1٪ مس و 0.5٪ مولیبدن می باشد که توسط مدار زیر فلوته می شود. مدار مورد نظر برای تولید کنسانتره مس و مولیبدن بکار گرفته شده است. آنالیز شیمیایی جریانها در جدول زیر داده شده است. با توجه اطلاعات موجود بازیابی مس و مولیبدن را در این مدار محاسبه نمایید.



محصول	عيار مولیبدن (%)	عيار مس (%)	عيار مس (%)
کنسانتره مولیبدن	27	0/01	32
کنسانتره مس	0/1	32	0/01
باطله نهایی	0/03	0.1	0.1

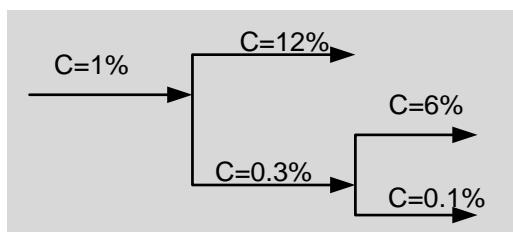
$$1 \times 1 = C_1 \times 0.01 + C_2 \times 32 + (1 - C_1 - C_2) \times 0.1$$

$$1 \times 0.5 = C_1 \times 27 + C_2 \times 0.1 + (1 - C_1 - C_2) \times 0.03$$

$$\rightarrow C_1 = 0.0174, \quad C_2 = 0.0283$$

$$R_{Cu} = \frac{0.0283 \times 32}{1 \times 1} \times 100 = 90.56\%, \quad R_{Mo} = \frac{0.0174 \times 27}{1 \times 0.5} \times 100 = 93.96\%$$

مثال 3: بازیابی کل در مدار زیرا بدست اورید. اعداد روی جریانها عیار را بر حسب درصد نشان می دهند.

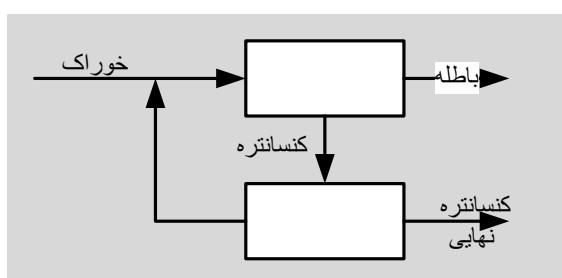


$$R_1 = \frac{c}{f} \times \left( \frac{f-t}{c-t} \right) = \frac{12}{1} \times \left( \frac{1-0.3}{12-0.3} \right) \times 100 = 71.79\%$$

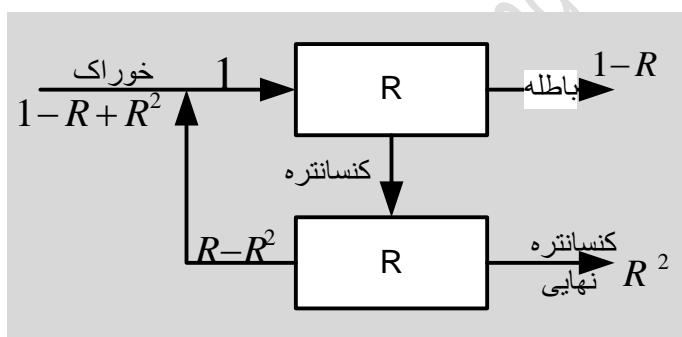
$$R_2 = \frac{c}{f} \times \left( \frac{f-t}{c-t} \right) = \frac{6}{0.3} \times \left( \frac{0.3-0.1}{6-0.1} \right) \times 100 = 67.8\%$$

$$R_t = 71.79\% + (100 - 71.79) \times 0.678 = 90.92\%$$

مثال 4: در مدار فلوتاسیون زیر اگر بازیابی مراحل اولیه، ثانویه و نهایی برابر با  $R$  باشد، مقدار بازیابی کل مدار  $R_t$  را محاسبه نمایید؟ اگر بازیابی  $R = 70\%$  باشد مقدار عددی  $R_t$  را بدست آورید؟

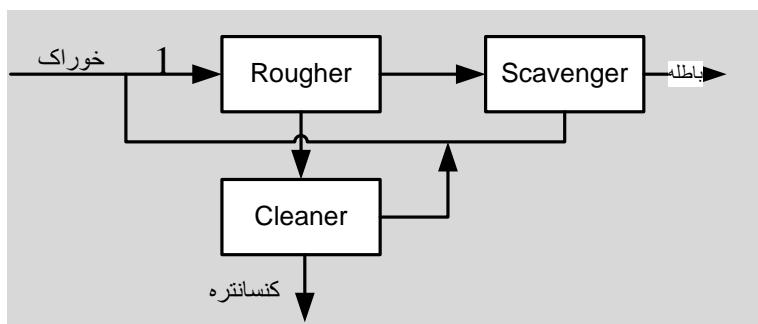


مقدار خوراک، قابل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد فرض نموده و در این صورت میتوان نوشت:

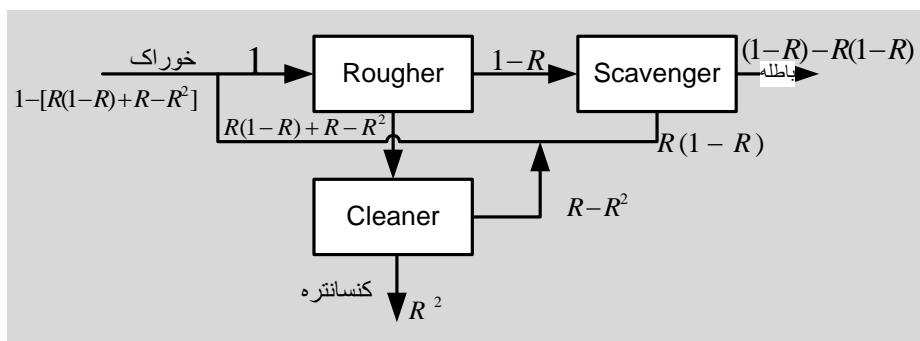


$$R_t = \frac{R^2}{1-R+R^2} = \frac{0.49 \times 100}{1-0.7+0.49} 62\%$$

مثال 5: در مدار فلوتاسیون زیر اگر بازیابی مراحل اولیه، ثانویه و نهایی برابر با  $R$  باشد، مقدار بازیابی کل مدار  $R_t$  را محاسبه نمایید؟ مقدار عددی  $R_t$  را بازای  $R = 80\%$  محاسبه نمایید.

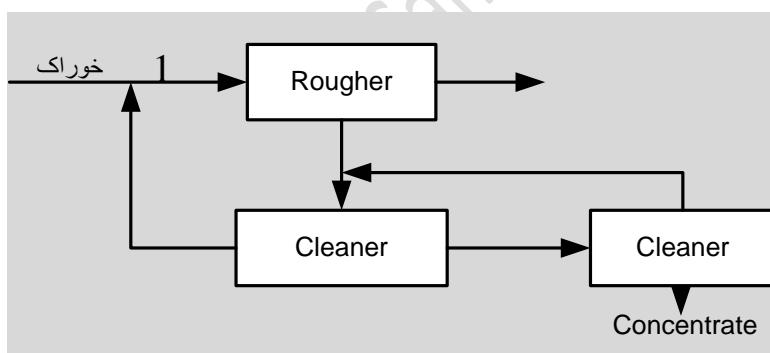


اگر مقدار خوراک قابل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد فرض کنیم، در این صورت میتوان نوشت:

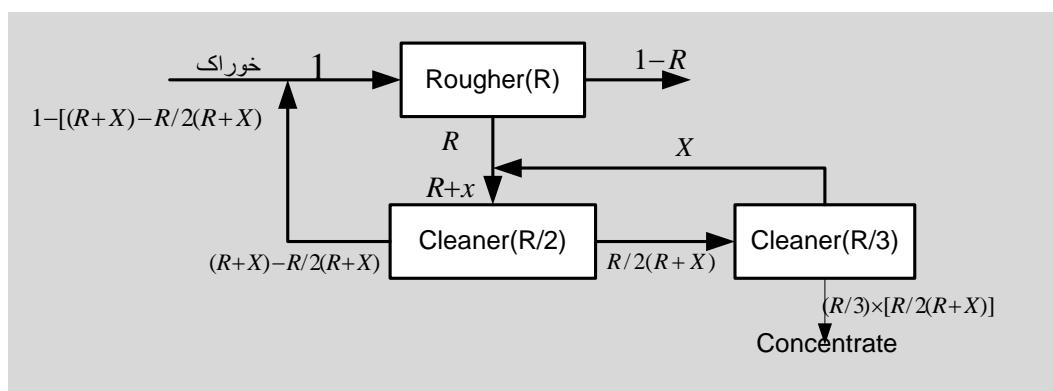


$$R_t = \frac{R^2}{(1-R)^2 + R^2} \stackrel{R=0.8}{\Rightarrow} Rt = \frac{0.64 \times 100}{0.04 + 0.64} = 94\%$$

مثال 6: در مدار فلوتاسیون زیر اگر بازیابی سلول های اولیه 2 برابر سلول های دوم و سه برابر سلول های مرحله سوم باشد، بازیابی کل مدار را محاسبه نمایید؟



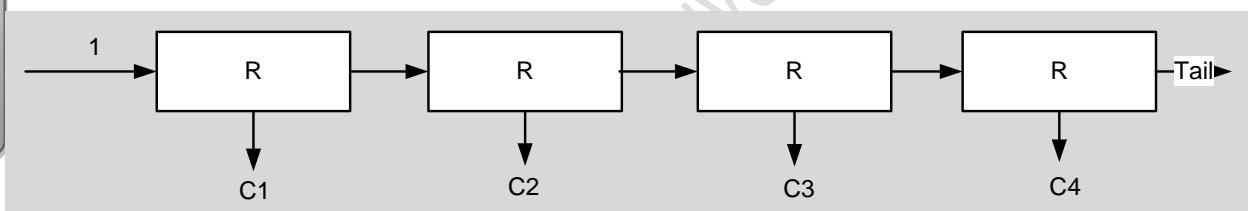
حل: بازیابی سلول های اولیه را برابر با  $R$  فرض نموده و همچنین اگر مقدار خوراک قابل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



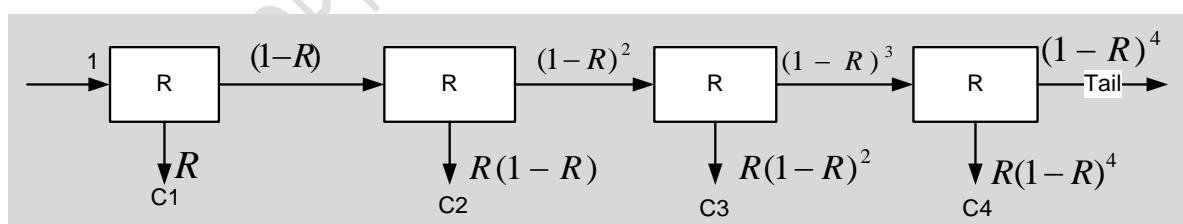
$$X = \frac{1}{2}R(R+X) - \left[\frac{1}{3}R\left(\frac{1}{2}(R+X)\right)\right] \Rightarrow X = \frac{3R^2 - R^3}{6 - 3R + R^2}$$

$$R_t = \frac{[(1/3)R(R/2(R+X))]}{1 - [(R+X) - (1/2)R(R+X)]}$$

مثال 7: در مدارهای فلوتاسیون زیر اگر بازیابی هر یک از مراحل برابر با  $R$  باشد، مطلوبست محاسبه بازیابی کل؟

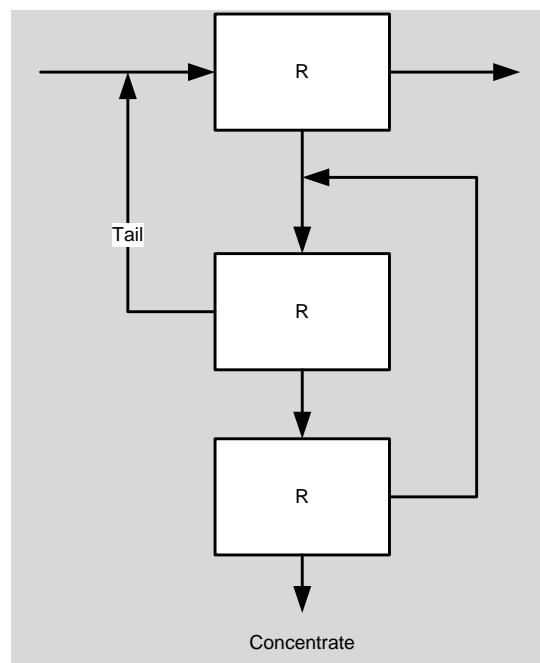


اگر مقدار خوراک قابل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد در نظر بگیریم، می توان نوشت:

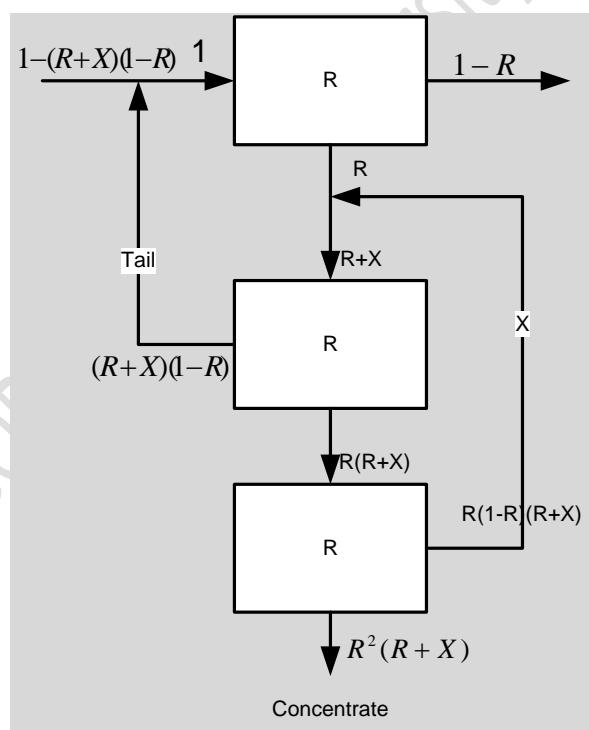


$$R_t = 1 - (1 - R)^4$$

مثال 8: در مدارهای فلوتاسیون زیر اگر بازیابی هر یک از مراحل برابر با  $R$  باشد، مطلوبست محاسبه بازیابی کل؟

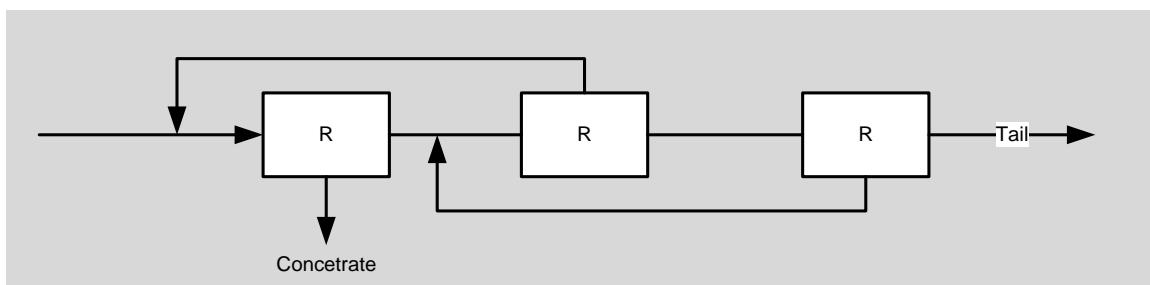


اگر مقدار خوراک قابل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد در نظر بگیریم، می توان نوشت:

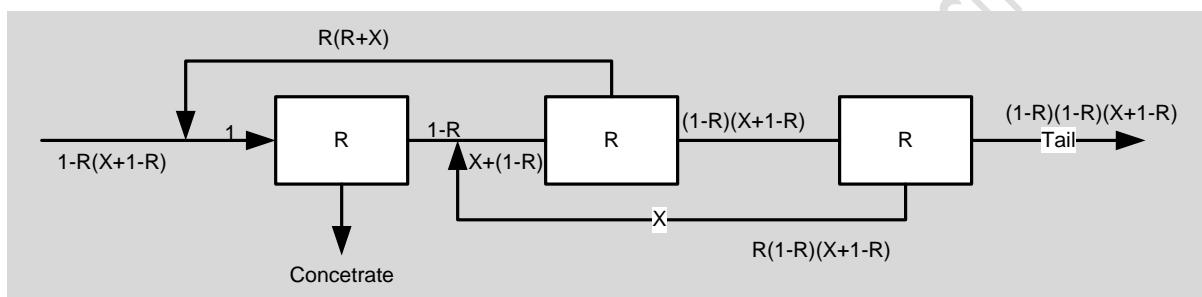


$$R_t = \frac{R^2(R + X)}{1 - (R + X)(1 - R)}$$

مثال 9: در مدارهای فلوتاسیون زیر اگر بازیابی هر یک مرحله برابر با  $R$  باشد، مطلوبست محاسبه بازیابی کل؟



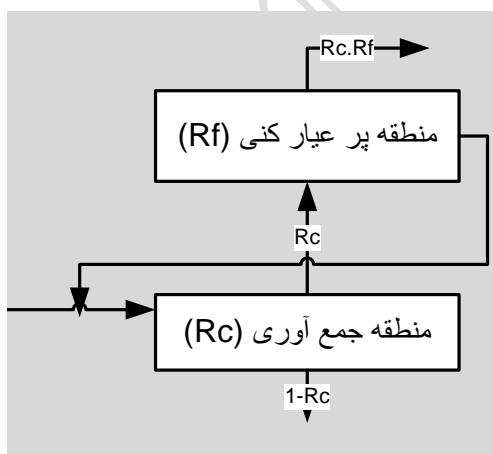
اگر مقدار خوراک قبل شناور برای سلول اولیه را برابر واحد در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:



$$X = R(1 - R)(X + 1 - R) \quad \text{و} \quad R_t = \frac{R}{[1 - R(X + 1 - R)]}$$

مثال 10: در مدار فلوتاسیون ستونی که مطابق شکل زیر می‌باشد، بازیابی را محاسبه نمایید؟

تمامی ذراتی که به حباب‌ها متصل شده اند وارد منطقه پر عیار کنی شده و بازیابی نمی‌شوند و بخشی از انها دوباره به پالپ بر کی گردد.

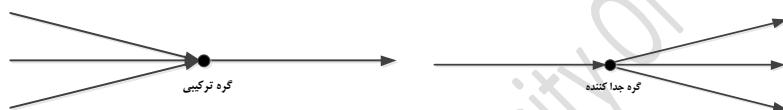


$$R = \frac{R_c R_f}{R_c R_f + 1 - R_c}$$

## موازنۀ جرم مدارهای پیچیده

مدار آرایشی فلواتیون را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جدا کننده‌ها در نظر گرفت که نرخ جریان ورودی با خروجی در آنها برابر است که برای مثال می‌توان گفت که تناثر ورودی به مدار فلواتیون برابر با مجموع تناثر کنسانتره و باطله می‌باشد.

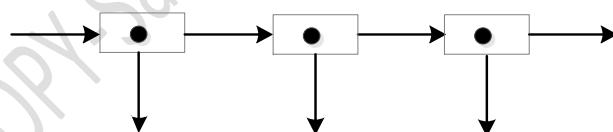
برای مداری که در آن  $n$  جریان با دبی مجهول وجود دارد،  $n$  معادله خطی برای محاسبه مجهولات مورد نیاز است. در چنین مدارهایی که شامل تعداد زیادی جریان می‌باشد، می‌توان آنها را به صورت گره نشان داد که در آنها جریان‌هایی وارد و جریان‌هایی خارج می‌شوند. گرهی که جریان‌های ورودی را به یک جریان تبدیل کنند تحت عنوان گره ترکیبی و گرهای که یک جریان ورودی را چندین جریان تقسیم می‌نماید تحت عنوان گره‌های جدا کننده می‌نامند.



هرگاه برای هر مدار،  $F$  جریان خوراک و  $S$  گره جدا کننده وجود داشته باشد،  $N$  حداقل نمونه‌های مورد نیاز (جریان‌هایی که بایستی نمونه برداری شوند) برای یافتن دبی‌های مجهول از فرمول اشمیت برابر است با:

$$N=2(F+S)-1$$

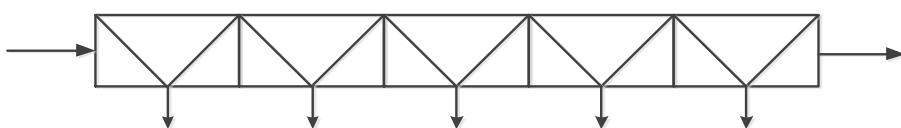
مدار فلواتیون زیر را در نظر بگیرید (یک ردیف فلواتیون)



که در آن می‌توان نوشت:

$$F = 1 \quad , \quad S = 3 \quad \Rightarrow N = 2(1 + 3) - 1 = 7$$

در مدارهایی که به یک گره بیش از 2 جریان وارد یا خارج می‌شود می‌توان آن را به صورت زیر ساده نمود:

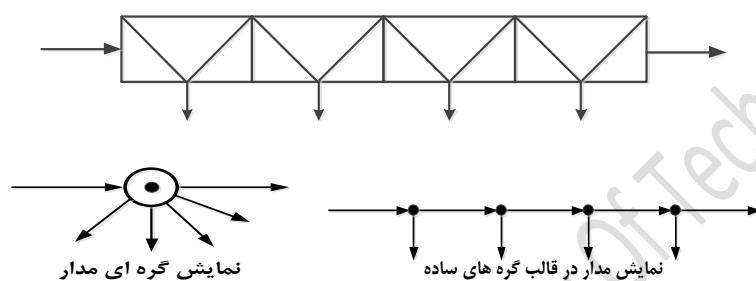


با توجه به شکل ساده شده می‌توان حداقل تعداد مسیر مورد نیاز جهت برداشت نمونه را تعیین نمود.

$$N=2(F+S)-1=2(1+5)-1=11$$

به عبارتی علاوه بر نمونه برداری از همه جریان‌ها، ۴ دبی نیز با استی اندازه گیری شود. به طور کلی می‌توان گفت که یک جدا کننده‌ای با  $n-1$  گره قابل تبدیل می‌باشد.

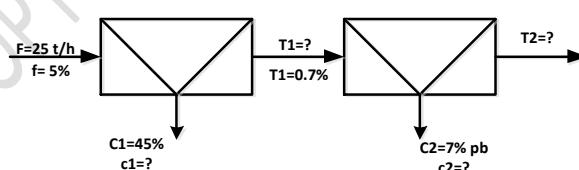
با استی توجه نمود که در فرمول اشمیت برای حداقل نمونه برداری،  $S$  تعداد جدا کننده‌های ساده می‌باشد. اگر در مداری جدا کننده‌ای دارای بیش از دو محصول باشند و گره‌های ترکیبی با بیش از دو جریان تغذیه شوند قبل از استفاده از این فرمول با استی گره‌های مرکب را با استفاده از جریان‌هایی که وجود خارجی دارند را به گره‌های ساده‌تر تبدیل شود. برای مثال مدار فلواتیون زیر را در نظر بگیرید:



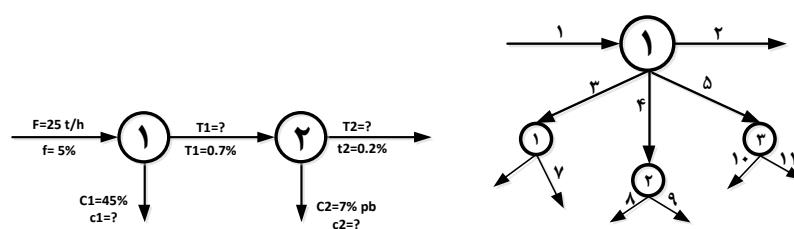
$$F = 1, S = 4 \Rightarrow N = 2(1 + 4) - 1 = 9$$

توجه کنید که جریان‌های خط چین وجود خارجی نداشته و صرفاً ۶ جریان برای نمونه برداری وجود دارند. بنابراین نرخ جریان در سه جریان خط چین نیز باید انتخاب شود. ممکن است برای موازنی جرم مدار، عیار فلز در ۶ جریان اندازه گیری شوند و نرخ جامد جریان‌های جامد در ۴ جریان میانی یعنی (کنسانترهای) اندازه گیری شود.

مدار فلواتیون زیر را در نظر بگیرید (مدار آرایش کانسنگ را نشان می‌دهد):



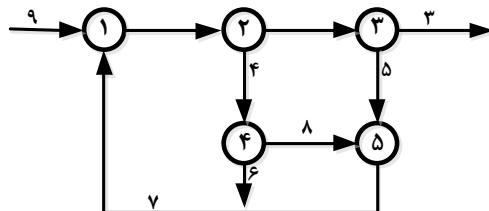
مدار فوق را می‌توان به صورت گره‌های ساده تبدیل نمود.



گره	ها $n_p + 1$	ها $n_n - 1$	$j = n_p - 1$	$S = n_n - 1$
1	1	4	0	3

2	1	2	0	1
3	1	2	0	1
4	1	2	0	1

$$N=2[F+S]-1=2[1+6]-1=13$$



گروه	ها $n_p(+1)$	ها $n_n(-1)$	$j=n_p-1$	$S=n_n-1$
1	2	1	1	0
2	1	2	0	1
3	1	2	0	1
4	1	2	0	1
5	2	1	1	0

$$N=2[F+S]-1=2[1+3]-1=7$$

برای محاسبه پارامترها می‌توان نوشت (چهار معادله چهارمجهولی):

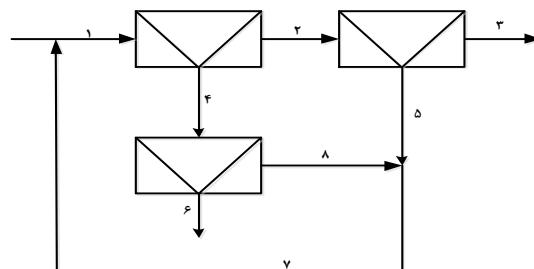
$$\begin{cases} 25 = C_1 + T_1 \\ T_1 = C_2 + T_2 \\ 25 \times 5 = C_1 \times 45 + T_1 \times 0.7 \\ T_1 \times 0.7 = C_2 \times 7 + T_2 \times 0.2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 2.43 \text{ t/h} \\ C_2 = 1.66 \text{ t/h} \\ T_1 = 22.57 \text{ t/h} \\ T_2 = 20.91 \text{ t/h} \end{cases}$$

که برای مدار فوق می‌توان حداقل نمونه مورد نیاز را به دست آورد:

$$N=2[F+S]-1=2[1+2]-1=5$$

یعنی برای محاسبه نرخ جریان‌ها باید از تمام جریان‌ها نمونه برداری نموده و برای حل مسئله اطلاعات موجود کافی بودند، با استفاده از رابطه اشمیت قبل از حل مسئله می‌توان فهمید که از چه جریان‌هایی باید نمونه برداری نمود.

برای مدار فلوتاسیون زیر داده‌های جدول زیر موجود می‌باشد نرخ جامد خوراک ورودی یک تن بر ساعت می‌باشد. نرخ جامد را در سایر جریان‌های مدار حساب کنید.

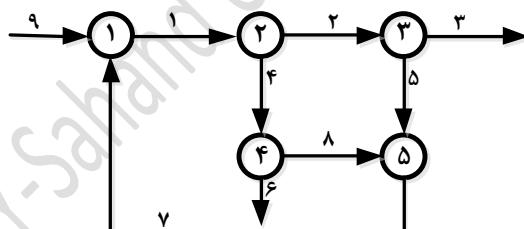


داده‌های جدول عبارتند از:

شماره جریان	9	8	6	5	4	3	2	1
عيار مس.%	1/5	2/1	25	4/2	16/1	0/12	0/51	

برای حل مسئله ابتدا بایستی مدار را به گره‌های ساده و شاخه خلاصه نموده و قبل از آن می‌توان حداقل نمونه‌برداری از مدار را مشخص نمود.

مدار ساده شده به صورت گره‌های ساده و شاخه‌ها به صورت مقابل می‌باشد که در آن گره‌های 2، 3 و 4 جداگانه ساده و 5 و 1 ترکیب کننده ساده هستند. لذا می‌توان حداقل تعداد جریان‌هایی که بایستی نمونه‌برداری شوند را از رابطه اشمیت محاسبه نمود.



$$N = 2[F+S] - 1 = 2[1+3] - 1 = 7$$

برای حل مسئله می‌توان گفت که معادلات زیر مورد نیاز بوده و می‌توان نوشت  $W_1 = W_9 + W_7$  (نخ جامد جریان ۱)،  $W_1 = W_2 + W_4$  (معادله از موازنۀ جرم حاصل می‌شود و علاوه بر آن برای حل معادله ۸ مجهولی نیاز به ۳ معادله دیگر می‌باشد). این سه معادله را بایستی به نحوی از موازنۀ فلز موجود در مدارها به دست آورد به عبارتی بایستی عیار مس در جریان‌های ورودی و خروجی سه گره اندازه‌گیری شده باشند با مراجعه به جدول داده شده می‌توان گفت که موازنۀ جرم مس حول گره‌های 2 و 3 و 4 امکان‌پذیر است پس می‌توان نوشت:

$$\text{موازنۀ دبی وزنی} \left\{ \begin{array}{l} W_1 = W_9 + W_7 \\ W_1 = W_2 + W_4 \\ W_2 = W_3 + W_5 \\ W_4 = W_8 + W_6 \\ W_7 = W_5 + W_8 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} W_2C_2 = W_3C_3 + W_5C_5 \\ W_4C_4 = W_8C_8 + W_6C_6 \end{cases} \text{ موازنۀ فلز مس}$$

معادله دیگر را می‌توان از موازنۀ کل مس در کل مدار به دست آورد یعنی:

$$W_9C_9 = W_3C_3 + W_6C_6 \text{ موازنۀ مس}$$

باید توجه نمود که معادلات نوشته شده مستقل باشند. به عبارتی نمی‌توان از معادله موازنۀ وزنی حول کل مدار استفاده نمود چرا که معادله مذکور از ترکیب پنج معادله اول به راحتی حاصل می‌شود و نمی‌توان از آن استفاده نمود. به طور کلی در مداری که از  $b$  شاخه و  $n$  گره تشکیل شده باشد، تنها  $(b-n)$  جریان می‌تواند دارای نرخ جامد مستقل باشد. پس برای موازنۀ مدار فوق بایستی 8 معادله فوق حل گردد تا مجھولات مربوطه حاصل شود.

اگر 8 معادله مجھولی را در کنار هم و با هم حل کنیم می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = W_7 + W_9 \\ W_1 = W_2 + W_4 \\ W_2 = W_3 + W_5 \\ W_4 = W_6 + W_8 \\ W_7 = W_5 + W_8 \\ \dots \dots \dots \\ W_2C_2 = W_3C_3 + W_5C_5 \\ W_4C_4 = W_6C_6 + W_8C_8 \\ W_9C_9 = W_3C_3 + W_6C_6 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{موازنۀ دبی وزنی} \\ \text{موازنۀ فلز} \end{array}$$

برای حل معادلات فوق می‌توان از حل ماتریس آنها بهره گرفت (برای جریانی که به گره وارد می‌شود (+1) و برای جریان خروجی از گره با (-1) و (0) برای جریانی که در گره ظاهر نمی‌شود).

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 2 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 3 & 0 & +c_2 & -c_3 & 0 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & +c_4 & 0 & -c_6 & 0 & -c_8 & 0 \\ \text{گره کلی} & 0 & 0 & +c_3 & 0 & 0 & +c_6 & 0 & 0 & -c_9 \end{matrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ \dots \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جهت تبدیل به ماتریس مربع می‌توان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccccc} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +c_2 & -c_3 & 0 & -c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c_4 & 0 & -c_6 & 0 & -c_8 \\ \text{کل} & 0 & 0 & c_3 & 0 & +c_6 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot W_1 = (-1)W_9 \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_9 \end{bmatrix} \\
 \end{array}$$

بخش فوقانی ماتریس ضرایب را که دارای درایه‌های ۰، ۱ و -۱ هستند ماتریس ارتباطی (Connection Matrix) می‌نامند و به روش زیر بدست می‌آید:

+ برای جریان  $\bar{J}$  که به گره  $\bar{i}$  وارد می‌شود

-۱ - برای جریان  $\bar{J}$  که از گره  $\bar{i}$  خارج می‌شود  $C_{ij}$

۰ برای جریان  $\bar{J}$  که در گره  $\bar{i}$  ظاهر نمی‌شود

در ماتریس ارتباطی مجموع درایه‌های هر ستون ۰، ۱ و -۱ است.

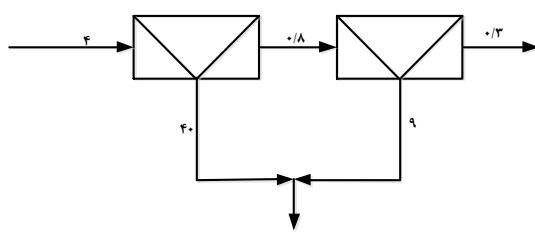
ماتریس ارتباطی دارای ستون‌هایی به تعداد جریان‌ها و دارای سطرهایی به تعداد گره‌های مدار دارد به عبارتی نحوه ارتباط شاخه‌ها به گره‌ها را نشان می‌دهد ( $W_9$  معلوم است).

$$\begin{cases} W_1 = 1.14 \text{ t/h} \\ W_2 = 1.04 \text{ t/h} \\ W_3 = 0.94 \text{ t/h} \\ W_4 = 0.09 \text{ t/h} \\ W_5 = 0.1 \text{ t/h} \\ W_6 = 0.06 \text{ t/h} \\ W_7 = 0.14 \text{ t/h} \\ W_8 = 0.04 \text{ t/h} \end{cases}$$

ماتریس ارتباط به تعداد گره‌های مدار، سطر و به تعداد شاخه‌های مدار ستون دارد.

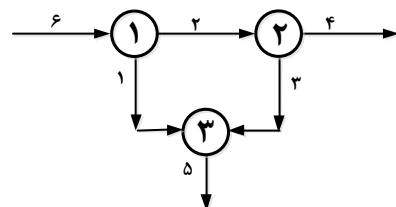
موازن جرم مدار زیر را

انجام دهید:



اعداد روی جریان‌ها عیار فلز بوده و دبی جامد خشک ورودی 30 تن بر ساعت می‌باشد.

ابتدا بایستی مدار را به گره‌های ساده و شاخه تبدیل نمود.



$$F=1, S=2 \rightarrow N=2[F+S]-1=2[1+2]-1=5$$

بنابراین داده کافی جهت موازنی مدار وجود دارد.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ ... \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & -c_6 \\ 0 & +c_2 & -c_3 & -c_4 & 0 & 0 \end{matrix} \right] & \left[ \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{matrix} \right] & = & \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \end{array}$$

که  $c_1$  عیار فلز در جریان آم می‌باشد.

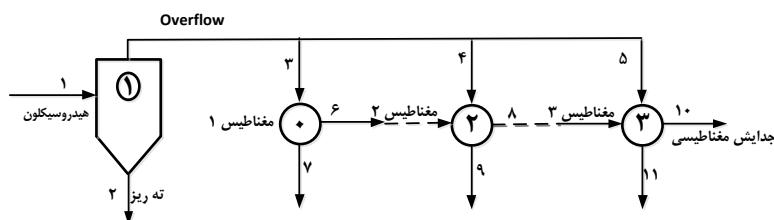
در مرحله بعد ستون مربوط به جریان با دبی معلوم را به سمت راست می‌توان انتقال داد (ماتریس مربعی تشکیل گردد).

$$\left[ \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +c_2 & -c_3 & -c_4 & 0 \end{matrix} \right] \times \left[ \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]$$

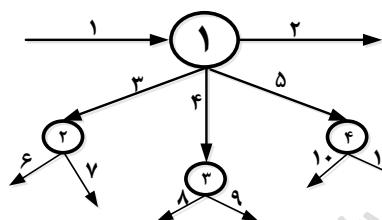
و با جایگزینی می‌توان معادله‌ها را حل نمود.

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.45 \\ 27.55 \\ 1.58 \\ 25.97 \\ 4.03 \end{bmatrix}$$

مدارهای زیر را به گره و شاخه تبدیل و سپس ماتریس ارتباط آن را بنویسید، و حداقل تعداد مسیر نمونه برداری را مشخص کنید.



مدار فوق را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



پس چهار گره و ۱۱ جریان دارد و می‌توان ماتریس موازنہ جرم آن را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & +1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

با توجه به اینکه در مدار فوق گرههای غیر ساده هم وجود دارد می‌توان به راحتی با شمارش (+1) و (-1) برای هر گروه تعداد ترکیب کننده ساده و جداکننده ساده را به دست آورده به طوریکه اگر تعداد  $n_p$  گره با  $n_p$  و تعداد  $n_n$  گره با  $n_n$  نشان داده شود تعداد جداکننده‌های ساده برابر  $S = n_p - 1$  و تعداد ترکیب کننده‌های ساده برابر با  $j = n_n - 1$  خواهد بود. برای مدار فوق می‌توان نوشت:

گره	$n_p(+1)$	$n_n(-1)$	$j = n_p - 1$	$S = n_n - 1$
1	1	4	0	3
2	1	2	0	1
3	1	2	0	1
4	1	2	0	1
جمع ستون‌ها			0	6

$$F=1, S=2 \rightarrow N=2[F+S]-1=2[1+6]-1=13$$

علاوه بر 11 جریان موجود، 2 دبی دیگر جریان تعداد نمونه برداری باید اندازه گیری شود (خواراک اصلی مدار مشخص می باشد).

از ماتریس ارتباطی می توان برای تعیین سری معادلات خطی جهت حل و تعیین دبی های مجهول استفاده نمود. ماتریس  $M$  را می توان با عنصرهای زیر تعریف نمود.

$$M_{ij} = C_{ij} \times B_j$$

که  $B_j$  نشان دهنده دبی جرمی جامد مواد در جریان  $j$  است که برای گره 1 در مثال قبلی می توان نوشت:

$$C_{ij} = +1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0$$

برای همین گره 1 موازن جرم ( $M_{ij}$ ) را می توان نوشت:

$$B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 = 0$$

ماتریس موازن جزء  $A$  را می توان به فرم زیر در حالت کلی بیان نمود:

$$A_{ij} = C_{ij} B_j a_j = M_{ij} \times a_j$$

که در آن  $a_j$  تعداد جزء نظیر عیار، درصد آنالیز سرند، رقت و... در جریان  $j$  است و برای گره 1 می توان نوشت:

$$B_1 a_1 - B_2 a_2 - B_3 a_3 - B_4 a_4 - B_5 a_5 = 0$$

در حالت کلی برای مدار اگر  $n$  تعداد گره ها و  $S$  تعداد جریان ها باشد می توان ماتریس معادلات به فرم زیر نوشت (خواراک ورودی مدار به عنوان جریان مرجع معلوم باشد).

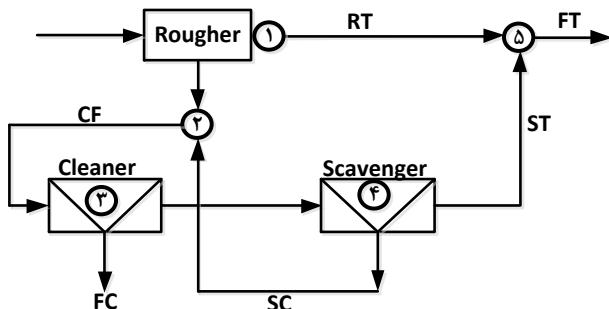
$$B_s = 1, M_{1s} = 1 \times C_{1s}, A_{1s} = C_{1s} a_s$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \dots & \dots & C_1(S-1) \\ C_{21} & \dots & \dots & C_2(S-1) \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & & & \\ C_{11} a_1 & \dots & \dots & C_1(S-1)a(s-1) \\ \vdots & & & \\ C_{n1} a_1 & \dots & \dots & C_1(S-1)a(s-1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{13} \\ -C_{25} \\ \vdots \\ -C_{1s} a_s \\ \vdots \\ -C_{ns} a_s \end{bmatrix}$$



البته می‌توان معادلی کلی مدار که در آن  $F = T + C$  را هم اضافه نمود.

در مدار زیر با توجه به داده‌های جدول، دبی‌های جریان‌ها را به دست آورید.



F	RT	RC	CF	FC	CT	FT	جریان
1/19	0/08	/74	8/4	24/83	2/07	0/14	عيار مس %

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \text{1} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{2} & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
 \text{3} & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 \\
 \dots & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 \text{1} & \dots \\
 \text{3} & -0.084 & -8.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{کل مدار} & 0 & 8.4 & -24.8 & -2.07 & 0 & 0 & 0 & -0.14 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix} RT \\ RC \\ CF \\ FC \\ CT \\ SC \\ ST \\ FT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.19 \\ -1.19 \end{bmatrix}$$

دبی خوراک ورودی برابر با 1 فرض شده است.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} RT \\ RC \\ CF \\ FC \\ CT \\ SC \\ ST \\ FT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87182 \\ 0.12818 \\ 0.15289 \\ 0.04258 \\ 0.11032 \\ 0.02472 \\ 0.08560 \\ 0.95742 \end{bmatrix}$$

شرایط لازم برای موازنی جرم مدار

$$N=2(F+S)-1$$

شرایط حداقل معادلات: در مداری که شامل  $b-n$  گره است، باید حداقل  $b-n$  گره آزاد موجود باشد که بتوان  $b-n$  معادله برای آن نوشت (وروودی و خروجی مناسب) (بقای جرم فلزات).

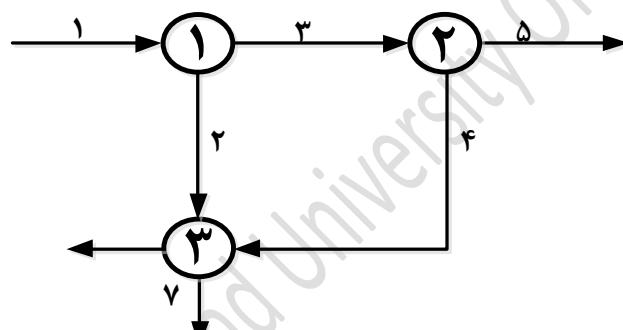
مستقل بودن معادلات موازنه جرم:  $n$  معادله موازنه جامد و  $b-n$  معادله موازنه فلز باقیستی دارای استقلال خطی باشند به عبارتی معادلات موازنه فلز را بروی گره‌هایی باقیستی نوشت که شرایط استقلال معادلات تحقق یابد. بنابراین نمونه‌برداری از نقاط مناسب مدار باقیستی انجام گردد.

برای آزمون اینکه جریان‌های مدار مستقل باشند، باقیستی ماتریس ارتباطی متناظر با سایرها جریان‌های آن مدار (جریان‌های واپسیه) معکوس‌بذری باشند. برای مثال مدار زیر را در نظر بگیرید و تحقیق کنید که آیا

جریان‌های 1، 2،

4 و 6 مستقل

هستند؟



شکل ماتریس را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_7 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C\vec{W} = \vec{0}$$

با فرض معلوم بودن جریان‌های 1، 2، 4 و 6 می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_3 \\ W_5 \\ W_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CI

CD

که  $CD$  ماتریس جریان‌های وابسته و  $CI$  ماتریس ارتباطی جریان‌های مستقل می‌باشد.

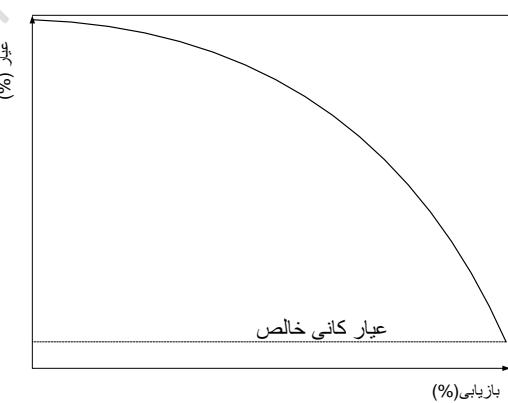
$$\overrightarrow{W_D} = -\overrightarrow{C_D}^{-1} (C_I \overrightarrow{W_I})$$

شرط لازم و کافی برای اینکه مقدار واحد برای  $W_D$  به دست آید این است که ماتریس ارتباطی جریان‌های وابسته  $CD$  وارون پذیر باشد. در این مثال  $CD$  وارون پذیر بوده و جریان‌های ۱، ۲، ۴ و ۶ از هم مستقل هستند.

### قابلیت جدایش و منحنی‌های بازیابی و راندمان

کانه‌آرایی و فلواتسیون در حقیقت فرآیندهای جداسازی کانی‌ها بر اساس ترکیب و ابعاد آنها است که مواد از یک جداکننده عبور می‌کند. بر اساس نیروی جدا کننده‌ای که اعمال می‌شود، جدایش ما بین کانی‌های با ارزش و باطله صورت می‌گیرد. میزان تاثیر نیروی جداکننده در آنها یکسان نبوده و در فلواتسیون می‌توان گفت که قابلیت شناور شدن کانی‌ها بیانگر جدایش آنها می‌باشد که این جدایش بستگی به دستگاه مورد استفاده و طرح آن، پارامترهای عملیاتی و مهارت‌های انسانی و... دارد. که عملکرد سیستم‌های جدایش را می‌توان بر اساس منحنی‌های جدایش ارزیابی نمود و تغییرات اعمالی را بر روی منحنی‌های جدایش نشان داد.

روش‌های مختلفی برای ارزیابی عملکرد یک سیستم جدایش مورد استفاده قرار می‌گیرند که معمول‌ترین آن منحنی عیار - بازیابی بوده و تغییرات آن به فرم زیر می‌باشد. بطوریکه با افزایش بازیابی عیار کاهش می‌یابد و در صورت بازیابی صد درصد عیار کنسانتره برابر با عیار خوراک می‌شود.



شکل (1)

در منحنی‌های بازیابی - راندمان تغییرات بازیابی بر حسب نسبت  $C/F$  ترسیم می‌شوند و اطلاعاتی که از آنها بدست می‌آید با ارزش می‌باشند. این گونه منحنی‌ها قابلیت جدایش را مستقل از ارزش عامل بررسی، ترکیب

و به یک منحنی واحد تبدیل می‌کنند. این روش شامل یک سری آزمایشات فلوتاسیون غیر پیوسته می‌باشد که منجر به تولید چندین نوع کنسانتره و یک نوع باطله می‌شود. نمایش نتایج با این منحنی‌ها این مزیت را داراست که با رسم یک بردار بین هر دونقطه می‌توان وضعیت کنسانتره را از لحاظ عیار و وزن بررسی نمود. هم چنین با استفاده از این منحنی‌ها می‌توان در مورد ویژگی‌های محصول میانی نیز قضاوت نمود.

همانطور که در مبحث کانه‌آرایی ذکر گردید بازیابی، راندمان و کارآبی جدايش را می‌توان از روابط زیر بدست آورد که در آنها  $f, c, T, F, C$  و  $t$  به ترتیب برابر با وزن کنسانتره، وزن خوراک، وزن باطله، عیار کنسانتره، عیار خوراک و عیار باطله می‌باشد و  $m$  مقدار تشوری فلز موجود در کانی می‌باشد. و از طرفی  $R_m, R_g, S.E.$  به ترتیب کارآبی جدايش، بازیابی گانگ و کانی با ارزش در کنسانتره می‌باشد.

$$R = \frac{Cc}{F.f} = \frac{c(f-t)}{f(t-c)}$$

$$Yield = Y = \frac{C}{F} = \frac{(f-t)}{(t-c)}$$

$$S.E. = R_m - R_g = \frac{m(f-t)(c-f)}{f(m-f)(c-t)}$$

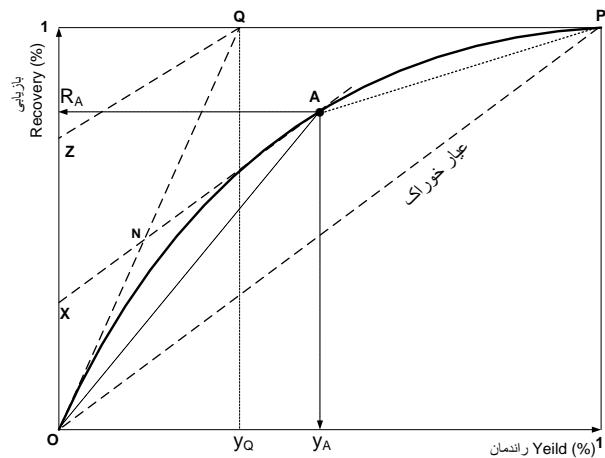
که با استفاده از منحنی‌های بازیابی - راندمان علاوه بر اطلاعات فوق می‌توان اطلاعات بیشتری از وضعیت جدايش بدست آورد. در شکل زیر نمونه‌ای از منحنی‌های راندمان- بازیابی ترسیم شده است. منحنی  $OP$  منحنی عیار-بازیابی بوده و با خط پر رنگ نمایش داده شده است.

-1 اگر نقطه  $A$  یک نقطه عملیاتی باشد و منحنی  $OAP$  منحنی جدايش باشد، شب خط  $OA$  را می‌توان بدست آورد که برابر با نسبت عیار کنسانتره تجمعی به عیار خوراک می‌باشد.

$$OA = \frac{R_A}{Y_A} = \frac{\frac{C_A \cdot c_A}{F.f}}{\frac{C_A}{F}} = \frac{C_A}{f}$$

-2 براحتی می‌توان شب خط  $AP$  را هم بدست آورد، که شب آن برابر با نسبت عیار باطله تجمعی به عیار خوراک می‌باشد.

$$AP = \frac{1 - \frac{C_A \cdot c_A}{F.f}}{1 - \frac{C_A}{F}} = \frac{(F.f - C_A \cdot c_A)}{(F - C_A) \cdot f} = \frac{T_A t_A}{f \cdot T_A} = \frac{t_A}{f}$$



شکل (2) منحنی راندمان-بازیابی

-3 به روی مشابه می‌توان شیب خط  $OP$  را بدست آورد که برابر با عیار خوراک می‌باشد. به عبارتی  $OP$  مکان هندسی نقاطی است که در آنها عمل جدايش صورت نگرفته است و از نظر جدايش هر چه از خط مذکور دورتر شویم جدايش بهتر صورت گرفته است.

$$\text{شیب } OP = \frac{\frac{C_P \cdot c_P}{F \cdot f}}{\frac{c_P}{F}} = 1 \rightarrow C_P = f$$

-4 هر نقطه عملیاتی بر روی منحنی که به مرکز وصل کنیم، دارای خاصیت برداری می‌باشد که مولفه افقی آن برابر با وزن کنسانتره، شیب خط برابر با عیار کنسانتره و مولفه قایم آن برابر با بازیابی می‌باشد.

$$\vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OP}$$

-5 شیب مماس بر منحنی از مبدأ  $OQ$  عیار کانی با ارزش خالص را نشان می‌دهد.

-6 منحنی جدايش کامل  $OQP$  بوده که  $OQ$  نشان دهنده بازیابی 100 درصد کانی با ارزش با عیار  $m$  و عیار باطله صفر می‌باشد.

-7 اگر از نقطه  $A$  خطی موازی  $OP$  رسم شود، محور عمودی را در نقطه  $X$  و خط جدايش کامل را در نقطه  $N$  قطع می‌کند و از لحاظ برداری می‌توان انرا بصورت دو مولفه، مولفه جدايش کامل  $ON$  و مولفه بدون جدايش  $NA$  نوشت.

$$OA = ON + NA \quad \text{و} \quad S.E. = \frac{ON}{OQ}$$

-8 اگر از نقطه  $Q$  خطی موازی  $OP$  رسم شود، محور عمودی را در نقطه  $Z$  قطع می‌کند که از تشابه دو مثلث  $OZQ$  و  $OXN$  می‌توان نوشت:

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{OX}{OZ}$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{OX}{OZ}$$

از روی شکل می‌توان شب خطوط  $XA, ZQ, OQ$  را بدست آورد.

$$\text{شیب } XA = \frac{R_A - X}{Y_A} = 1 \rightarrow X = R_A - Y_A$$

$$\text{شیب } ZQ = \frac{1 - Z}{Y_Q} = 1 \rightarrow Z = 1 - Y_Q$$

$$\text{شیب } OQ = \frac{1}{Y_Q} = \frac{m}{f} \rightarrow Y_Q = \frac{f}{m}$$

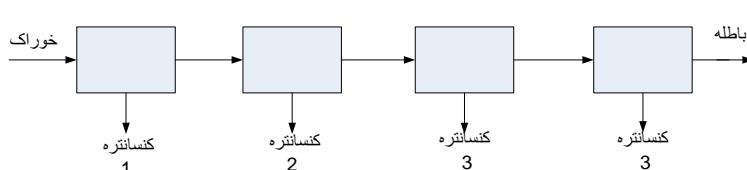
و از آنجا می‌توان نسبت  $\frac{OX}{OZ}$  را بدست آورد که برابر خواهد بود با:

$$S.E. = \frac{ON}{OQ} = \frac{OX}{OZ} = \frac{R_A - Y_A}{1 - \frac{f}{m}} = \frac{R - Y}{1 - \frac{f}{m}} = \frac{m(f-t)(c-t)}{f(m-f)(c-t)}$$

و به عبارتی دیگر می‌توان از روی منحنی‌های راندمان-بازیابی کار آئی جدایش را هم محاسبه و بدست آورد که در مثال زیر نمونه‌ای از کاربردهای آن تشریح شده است.

**مثال:** کانسنگ سربی دارای 10 درصد گالن به فرمول  $PbS$  می‌باشد که نتایج ازمایشات فلواتسیون در جدول زیر داده شده است. نتایج مربوطه را تفسیر و به سوالات زیر پاسخ دهید. مدار آرایش مطابق شکل زیر می‌باشد. (اوzan اتمی سرب 207 و گوگرد را 32 در نظر بگیرید)

- 1- اگر حداقل عیار کنسانتره 70٪ باشد، بازیابی و راندمان تجمعی را بدست آورید.
- 2- به ازای چه عیار باطله‌ای می‌توان به عیار هدف 95 درصد دست یافت؟
- 3- اگر عیار کنسانتره 70 درصد با بازیابی 95 درصد مورد نظر باشد، عیار محصول میانی را پیش‌بینی نمایید؟
- 4- خط بدون جدایش را ترسیم نموده و در مورد نحوه جدایش با توجه به فواصل دو منحنی بحث نمایید.
- 5- کار آئی جدایش را به ازای عیار تجمعی 70٪ بطور تقریبی محاسبه نمایید.



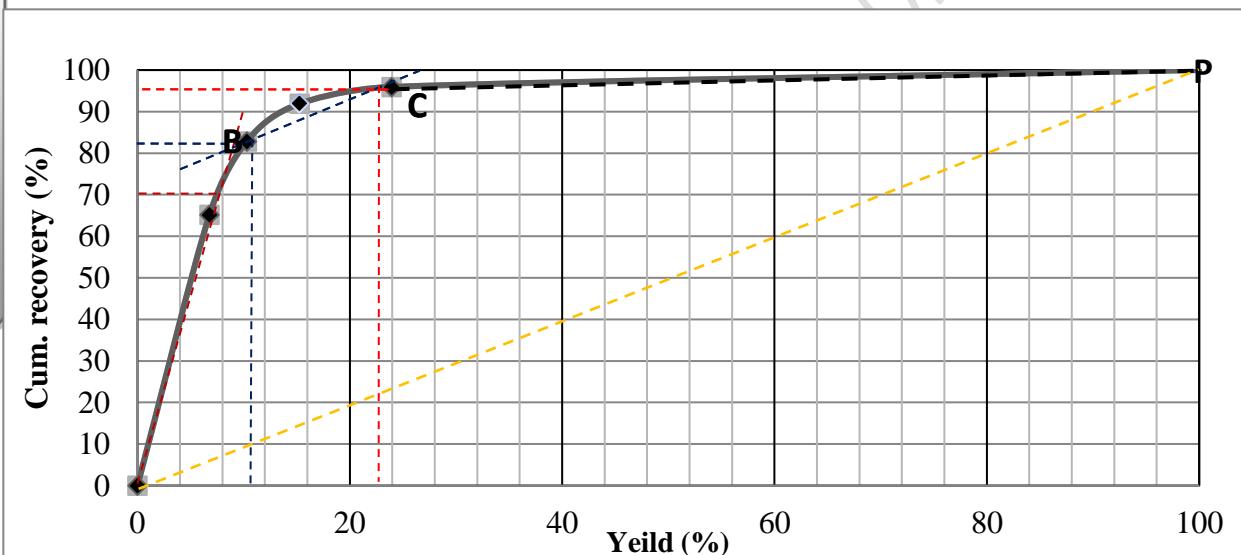
Sample	Mass(g)	Grade (%)
Concentrate 1	83.28	83.1
Concentrate 2	43.33	43.4

<b>Concentrate 3</b>	60.99	15.8
<b>Concentrate 4</b>	106.6	4.0
<b>Tail</b>	934.8	0.5

مقدار فلز تئوری در کانی گالن برابر با 86.6 درصد می باشد و ما بقی ان را سولفور تشکیل می دهد.  
محاسبات آنجام گرفته در نرم افزار excel در جدول زیر خلاصه شده است.

Sample	Mass(g)	Grade (%)	yield=C/F	Cum. yield	Recovery (%)	Cum. recovery (%)
				0	0	0
Concentrate 1	83.28	83.1	6.78	6.78	65.141	65.14
Concentrate 2	43.33	43.4	3.53	10.30	17.709	82.85
Concentrate 3	60.99	15.8	4.96	15.26	9.063	91.91
Concentrate 4	106.6	4.0	8.67	23.94	4.032	95.94
Tail	934.8	0.5	76.06	100.00	4.056	100.00
<b>Sum</b>	<b>1229.0</b>		<b>100.00</b>			

که منحنی عیار و بازیابی در شکل زیر داده شده است.



$$OA = \frac{c_A}{f} = \frac{70}{8.6} = \frac{R}{Y} = \frac{70}{Y} = 8.33 \rightarrow Y = \frac{70}{8.33} = 0.12 \rightarrow Y = 12\%, R = 83\% \quad 1$$

$$CP = \frac{t_A}{f} = \frac{100-95}{100-23.5} = \frac{5}{76.5} = 0.065 \rightarrow t_A = 0.065 \times 8.6 = 0.559 \quad 2$$

$$BC = \frac{c_m}{f} = \frac{95-83}{23.5-10.3} = \frac{12}{13.2} = 0.91 \rightarrow c_m = 0.91 \times 8.6 = 7.82 \quad 3$$

با توجه به فواصل آنها می توان گفت که جدایش بهتری صورت گرفته است. -4

با استفاده از فرمول ذکر شده می توان نوشت و بعلاوه با روش ترسیمی نیز می توان محاسبه نمود. -5

$$S.E. = \frac{ON}{OQ} = \frac{OX}{OZ} = \frac{R_A - Y_A}{1 - \frac{f}{m}} = \frac{83 - 12}{1 - \frac{8.6}{86}} = \frac{71}{0.9} = 78.9\%$$

تمرین

1- نمونه ای از زغال در مقیاس آزمایشگاهی با کلکتور کروزن ( $H_1$ ) و کلکتور دی تیوفسفات ( $DP$ ) به همراه کروزن فلوته شده و نتایج زیر بدست امده است. مطلوب است رسم منحنی های عیار- بازیابی و راندمان- بازیابی و در مورد قابلیت جدایش این دو فرآیند بحث نمایید؟

Collector $H_1$			Collector $H_1+DP$		
Time (min)	Mass(g)	Ash (%)	Time (min)	Mass(g)	Ash (%)
0	461.8	58.5	0	456.2	58.7
0.5	43.6	13.2	0.5	56.5	21.2
1	18.3	15.1	1	30.9	26
1.5	11.9	16.1	1.5	30.3	25.7
2	10.3	14.7	2	23.6	26.8
2.5	5.4	15	2.5	17.3	28.6
3	4.7	13.7	3	13.3	27.3
7	17.5	12.8	7	21.1	31
Tail	350.1	72.6	Tail	263.3	83.1

2- فلوتاسیون کانسنجک مس با عیار 0.24٪ مس نتایج زیرا بر حسب زمان داده است. مطلوب است رسم منحنی های عیار- بازیابی و راندمان- بازیابی و بحث در مورد قابلیت جدایش؟ کل خوراک مورد استفاده برابر با 1036.8 گرم می باشد.

300	120	60	40	20	زمان (s)
63.3	35.2	13.2	15	24.9	زمان
0.16	1.34	1.8	1.93	2.47	عیار(%)

## (Residence Time) زمان ماند

مدت زمان اقامت مواد در یک سلول فلوتاسیون و یا مخزن تحت عنوان زمان ماند شناخته می‌شود. معمولاً هرچه ذره‌ای مدت زیادی را در سلول فلوتاسیون بگذراند، احتمال فلوتاسیون آن بیشتر می‌باشد. زمان ماند را می‌توان از تقسیم نمودن حجم سیستم به نرخ دبی حجمی سیستم به دست آورد. پس می‌توان گفت که زمان ماند بستگی به نرخ دبی حجمی و حجم جسم دارد. هر چه نرخ دبی حجمی بیشتر و نیز هرچه حجم سیستم کوچکتر باشد، زمان ماند کوتاه‌تر خواهد بود.



شکل 1- بستگی زمان ماند به حجم و نرخ دبی حجمی که دبی ورودی و خروجی از آن ثابت می‌باشد. زمان ماند همچنین بستگی به حجم سیستم نیز دارد که معمولاً ماندگی<sup>7</sup> نامیده می‌شود. برای دبی ثابت جریان، ذرات زمان بیشتری را در سیستم‌هایی با حجم بزرگتر نسبت به سیستم‌هایی با حجم کوچکتر سپری می‌کنند.

## (Residence Time Distribution) توزیع زمان ماند

همهی ذرات موجود در سلول زمان ماند یکسانی را سپری نمی‌کنند. به عبارت دیگر رفتار آنها از تابع توزیع احتمالی زمان‌های ماند پیروی می‌کند. اگر تمام ذرات موجود در یک سلول به مدت زمان مساوی در سلول باقی بمانند، جریان مذکور تحت عنوان جریان پیستونی<sup>8</sup> نامیده می‌شود. برای نمونه، انتقال مواد توسط یک لوله و نوار نقاله مثال‌های خوبی از این جریان‌ها می‌باشد. هدف اصلی در فلوتاسیون رسیدن به الگوی جریان پیستونی است.

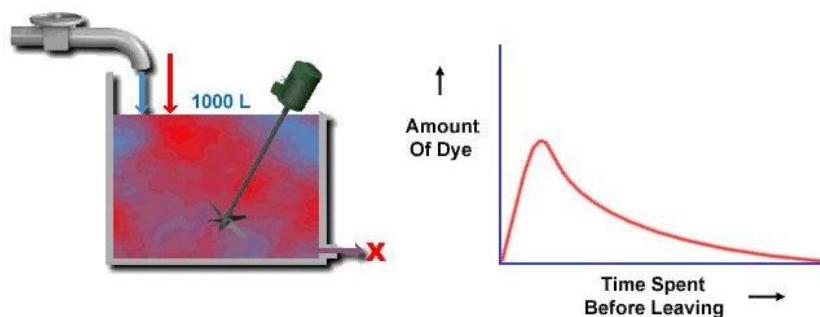
عكس فرایند جریان پیستونی، اختلاط کامل<sup>9</sup> می‌باشد که در این حالت ذرات و سیال به محض ورود به سیستم پراکنده شده و در نتیجه‌ی آن برخی ذرات زودتر و برخی دیرتر از سیستم خارج می‌شوند. شکل زیر توزیع زمان ماند را به خوبی نشان می‌دهد.

<sup>7</sup> Hold up

<sup>8</sup> Plug flow

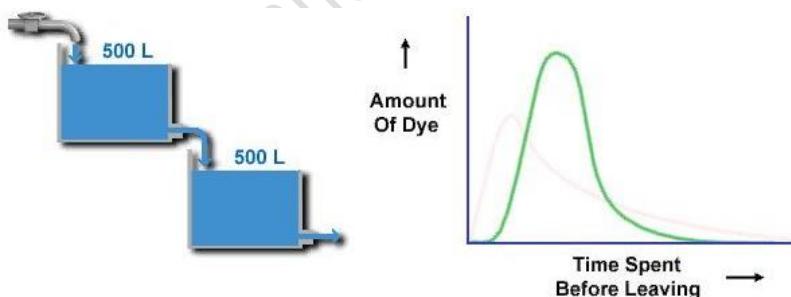
<sup>9</sup> Perfect mixing

شکل زیر یک روش مناسب برای درک و مشاهده توزیع زمان ماند، تصور یک تانک آب است که دارای دبی ورودی و خروجی مشخص است. در این مثال حجم تانک را 1000 لیتر فرض کنید که به وسیله‌ی یک همزن، به هم زده می‌شود تا اختلاط کامل صورت گیرد. اگر ما مقداری جوهر قرمز را به تانک اضافه کنیم و مقدار جوهر قرمز را در چند دقیقه‌ی بعد اندازه گیری کنیم، توزیع داده شده در شکل 2 حاصل می‌شود. مقداری از جوهر ممکن است سریعتر و مقداری دیرتر خارج شده باشد. همچنین مقدار کمتری نیز برای مدت زمان زیادی در سلول باقی می‌ماند.



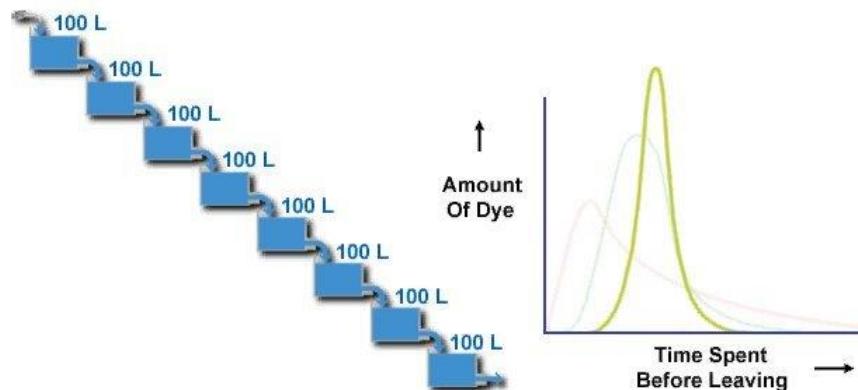
شکل 2- مفهوم توزیع زمان ماند

حال در نظر بگیرید که تانک بالایی به دو تانک 500 لیتری تقسیم شود و آزمایش بالا را تکرار کنیم (شکل 3). نتایج حاصله بسیار متفاوت خواهد بود و می‌توان گفت که نسبت به آزمایش قبلی جوهر بیشتری نسبت به حالت قبل در یک زمان ماند مساوی خارج می‌شود و در نتیجه پیک منحنی شدیدتر و پهنای آن کمتر می‌شود ولی زمان زیادی برای خروج از سلول دوم لازم می‌باشد.



شکل 3- توزیع زمان ماند با سلول های کوچکتر

حال اگر آزمایش بالا را در 10 ظرف 100 لیتری با همان حجم اولیه (شکل 4) انجام دهیم، نتایج باز هم متفاوت خواهد بود. زمان خروج از تانک نهایی خیلی زیاد بوده اما بخش عمده‌ی جوهر در یک زمان محدودی خارج می‌شود و در نتیجه پهنای منحنی باریکتر و ارتفاع آن زیادتر می‌شود که نازک شدن منحنی توزیع زمان ماند را نشان می‌دهد. و این دلیل چیدمان سری سلول های فلوتاسیون بطور سری و پشت سرهم در صنعت فلوتاسیون می‌باشد که درنتیجه این، اکثر ذرات دارای زمان ماند تقریباً یکسان بوده و در نتیجه احتمال فلوتاسیون همه‌ی ذرات تقریباً یکسان می‌شود.



شکل ۴- توزیع زمان ماند با کوچک شدن سلول ها و افزایش تعداد انها

با توجه به توضیحات بالا می‌توان گفت که تمامی ذرات موجود مدت زمان یکسانی را در سلول‌های فلوتاسیون و یا محفظه‌ی خردایش سپری نمی‌کنند. برخی از آنها سریعتر و برخی دیرتر طرف واکنش و یا محفظه مورد نظر را ترک می‌کنند. توزیع زمان ماند را می‌توان با تابع چگالی احتمال<sup>۱۰</sup> توصیف نمود که تحت عنوان تابع توزیع زمان ماند **RTD**<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود. تابع توزیع زمان ماند همانند تمامی توابع چگالی احتمال رخداد یک رویداد را با سطح زیر منحنی مربوط به آن تعیین می‌کند که سطح زیر منحنی آن همواره مابین ۰ تا بینهایت می‌باشد.

#### سیستم‌های پیوسته

برای بررسی زمان ماند سیستم دو الگوی به کار می‌رود. یکی الگوی جریان پیستونی که همه ذرات در آن به مدت زمان مساوی در سلول و یا در محفظه خردایش سپری می‌کنند و الگوی دیگر مخلوط کننده کامل می‌باشد که زمان ماند ذرات در آن از تابع چگالی احتمال در آن پیروی می‌کند.

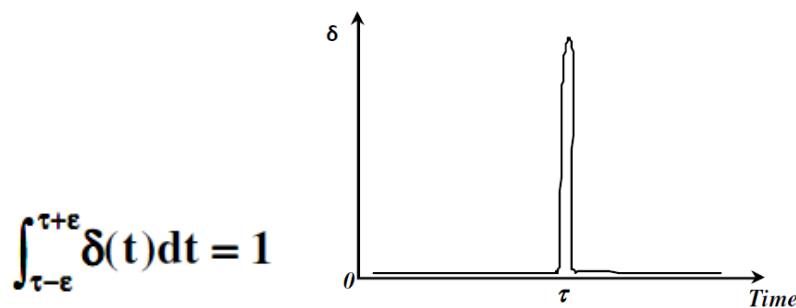
#### الگوی توزیع زمان ماند برای جریان پیستونی (Plug Flow)

زمانیکه بتوان زمان ماند تمام ذرات را یکسان در نظر گرفت، این مدل قابلیت کاربرد دارد. به عنوان مثال حرکت ذرات در یک لوله و نوار نقاله را می‌توان نمونه‌هایی از جریان پیستونی فرض نمود. الگوی جریان پیستونی را می‌توان با تابع ضربه بیان نمود بطوریکه نمودار تابع به جز یک بازه محدود در بقیه نقاط دارای مقدار صفر می‌باشد. تابع ضربه را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود :

شکل تابع ضربه (Dirac)

<sup>10</sup> Probability Density Function

<sup>11</sup> Residence Time Distribution



شکل 5- تابع ضربه

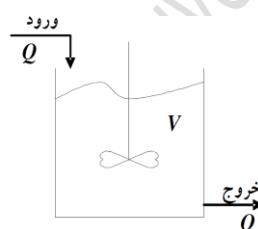
تابع ضربه دارای خاصیت زیر هم می باشد :

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) R(t) dt = R(\tau)$$

در جریان پیستونی چون توزیع زمان ماند همانند تابع ضربه می باشد، توزیع زمان ماند در چنین سیستم هایی دارای واریانس صفر می باشد.

### الگوی توزیع زمان ماند برای مخلوط کنندهی کامل

در این گونه مخلوط کننده فرض می شود که غلظت مواد ثابت بوده و زمان اختلاط در مقایسه با  $\tau$  خیلی کمتر می باشد.



که اگر دبی پالپ  $Q$  و حجم مخلوط کننده  $V$  باشد، متوسط زمان ماند برابر است با :

$$\tau = \frac{V}{Q}$$

اگر در زمان  $t=0$  رديابی به جرم  $M$  به مخلوط کننده اضافه شود (زمان اختلاط خیلی کمتر از متوسط زمان ماند  $\tau$  باشد)، در زمان  $(0 + \varepsilon)$   $t = (0 + \varepsilon)$  غلظت ردياب در ظرف برابر است با :

$$C_{(0+\varepsilon)} = \frac{M}{V}$$

برای ظرف واکنش مخلوط کنندهی کامل می توان گفت که نرخ تغییرات برابر است با نرخ ورودی منهای نرخ خروجی. پس می توان نوشت :

$$\frac{dM}{dt} = 0 - Q \frac{M_t}{V} = -QC_t$$

$$\frac{d(C_t \cdot V)}{dt} = -Q \cdot C(t) \Rightarrow \frac{dC_t}{C_t} = -\frac{Q}{V} dt \Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{Q}{V} dt$$

می دانیم که:  $\tau = \frac{V}{Q}$

$$\frac{dC}{C} = \frac{-1}{\tau} dt \Rightarrow \int_{C_0}^{C_t} \frac{dC}{C} = \int_0^t \frac{-1}{\tau} dt$$

$$\ln C_t - \ln C_0 = -\frac{1}{\tau} t \Rightarrow C_t = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

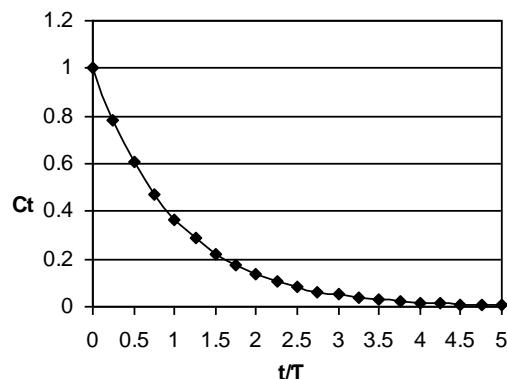
برای تبدیل  $C$  به غلظت جرمی، بایستی  $C$  را در  $V$  ضرب نمود.

$$C_t * V = C_0 V e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow M_t = M_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

چون در سیستم پیوسته بعد از زمان صفر نشانه‌ای (ردیابی) اضافه نمی‌شود، لذا بیشترین غلظت در  $(0 + \varepsilon)$  می‌باشد.

با استفاده از رابطه  $C_t = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  به راحتی می‌توان برای مقادیر مختلف  $t/\tau$ ، مقادیر غلظت خروجی در زمان‌های مختلف را اندازه‌گیری کرد ( $C_0=1$ ).

$t/\tau$	$C_t$
0	1
0.5	0.61
1	0.37
1.5	0.22
2	0.14
100	$3.72 \times 10^{-44}$

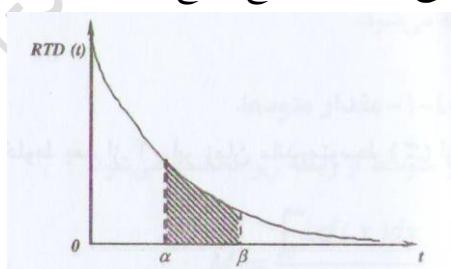


شکل 6: تغییر غلظت بر حسب زمان=سطح زیر منحنی غلظت-زمان

$$(Residence Time Distribution) \quad RTD = E(t) = \frac{C_t}{K}$$

$$\int_0^{\infty} E(t) dt = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{C_t}{K} dt = \frac{1}{K} \int_0^{\infty} C_t dt = 1$$

دارای بعد عکس زمان است. سعی زیر منحنی تابع توزیع چگالی برابر یک است.



$$P(\alpha < t < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} E(t) dt$$

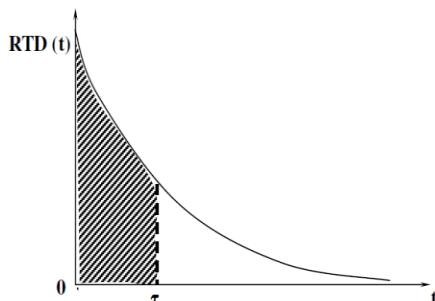
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} C_t dt = K = \int_0^{\infty} C_0 e^{-t/\tau} dt \Rightarrow K = C_0 \tau$$

$$RTD = E(t) = \frac{C_t}{K} = \frac{C_0 e^{-t/\tau}}{C_0 \tau} \Rightarrow RTD = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

مثال: چه مقدار از مواد داخل یک ظرف کاملاً مخلوط قبل از رسیدن به زمان  $\tau$  خارج می‌شود؟

$$RTD = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$A = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \frac{1}{\tau} \times (-\tau) \left( e^{-t/\tau} \right) \Big|_0^{\tau} = -(e^{-1} - e^0) = 0.632 \quad or \quad \%63.2$$



یعنی 63.2 درصد مواد قبل از رسیدن به زمان بازیابی بهینه از سلول خارج شده‌اند.

مثال :

مشخص کنید که چه بخشی از مواد درون یک سلول فلواتیون بعد از دو برابر، چهار برابر و شش برابر زمان ماند متوسط ( $\tau$ ) از آن خارج می‌شود. نتیجه را توضیح دهید.

$$RTD = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$X_2 = \int_0^{2\tau} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \frac{1}{\tau} \times (-\tau) \times \left[ e^{-t/\tau} \right] \Big|_0^{2\tau} = 86$$

$$X_4 = \int_0^{4\tau} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \frac{1}{\tau} \times (-\tau) \times \left[ e^{-t/\tau} \right] \Big|_0^{4\tau} = -(e^{-4} - e^0) = 0.98$$

$$\Rightarrow (1 - 0.98) \times 100 = \%2$$

یعنی 2 درصد مواد پس از زمان  $4\tau$  خارج می‌شود و از کارایی سیستم می‌کاهد.

$$X_6 = \int_0^{6\tau} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \frac{1}{\tau} \times (-\tau) \times \left[ e^{-t/\tau} \right] \Big|_0^{6\tau} = -(e^{-6} - e^0) = 0.9975$$

$$\Rightarrow (1 - 0.9975) \times 100 = \%0.25$$

یعنی 0.25 درصد مواد پس از زمان  $4\tau$  خارج می‌شود.

واریانس و میانگین تابع چگالی RTD برای اختلاط کامل برای توصیف الگوی اختلاط داخل سلول و یا محفظه سلول، میانگین و واریانس تابع RTD مورد نیاز می‌باشد.

میانگین تابع  $f(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = \frac{\sum_{\text{مساحت}} \text{زمان} \times \text{مساحت}}{\sum_{\text{مساحت}}} = \frac{\int_0^{\infty} x f(x) dx}{\int_0^{\infty} f(x) dx}$$

$$M = \frac{\int_0^\infty t RTD dt}{\int_0^\infty RTD dt} = \frac{\int_0^\infty t \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt}{1} \Rightarrow M = E(t) = \int_0^\infty t \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt$$

این تابع را یا به روش جزء به جزء یا انتگرال گاما می‌توان حل نمود:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \int_0^A t \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt \right] \Rightarrow M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ (-t e^{-t/\tau} - \tau e^{-t/\tau}) \right] \Big|_0^A \\ \Rightarrow M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -A e^{-A/\tau} - \tau e^{-A/\tau} + \tau \right]$$

که به ازای  $A \rightarrow \infty$  هر دو عبارت مبهم می‌باشند.

$$M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -A e^{-A/\tau} \right] = -\infty \times 0$$

$$M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{-A}{e^{A/\tau}} \right] = \frac{\infty}{\infty}$$

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌توان حد آنها را محاسبه نمود که در آن صورت:

$$M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{\frac{-1}{\tau} e^{-A/\tau}}{\frac{1}{\tau} e^{-A/\tau}} \right] = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$M = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\tau e^{-A/\tau} \right] = \frac{-\tau}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow M = (0 - 0 + \tau) = \tau$$

همچنین با استفاده از تابع گاما مقدار انتگرال برابر با  $\tau$  می‌شود و به عبارتی متوسط زمان ماند کاملاً مخلوط برابر با  $\tau$  می‌باشد.

واریانس تابع RTD ظرف کاملاً مخلوط:

$$\mu = \bar{E}(x) = \int_0^\infty x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \bar{E}[(x - \mu)^2] = \int_0^\infty (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

از طرفی طبق تعریف واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (t_i - \tau)^2}{N}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \int_0^\infty t_i^2 P(t) dt - \tau^2$$

احتمال مقدار  $t$  می‌باشد.  $P(t)$

طبق روابط فوق برای  $\sigma^2$  تابع RTD می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \sigma^2 = \int_0^\infty t^2 \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt - \tau^2$$

با تغییر متغیر  $A = t/\tau$  می‌توان انتگرال مربوطه را حل نمود.

$$\sigma^2 = \int_0^\infty t^2 \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt = \int_0^\infty \tau A^2 e^{-A} dA$$

$$\sigma^2 = \tau^2 \int_0^\infty A^2 e^{-A} dA = 2! \times \tau^2 = 2\tau^2$$

تغییر واریانس توزیع زمان ماند در مخلوط کنندهٔ کامل برابر است با:

$$\sigma^2 = 2\tau^2 - \tau^2 = \tau^2$$

واریانس نسبی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{\tau^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2} = 1$$

پس واریانس نسبی توزیع زمان ماند در یک مخلوط کننده‌ی کامل برابر واحد می‌باشد.

واریانس توزیع زمان ماند در یک جریان پیستونی را می‌توان ثابت نمود که برابر با صفر می‌باشد.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum[(t - \tau)^2 P(t)] = \sum[t^2 P(t)] - \tau^2 = \int_0^\infty t^2 RDT(t) dt - \tau^2 = \int_0^\infty t \delta(t - \tau) dt - \tau^2 \\ &\Rightarrow \sigma^2 = \tau^2 - \tau^2 = 0\end{aligned}$$

چه بخشی از مواد سلول پس از رسیدن به زمان 4 برابر زمان ماند ( $t=4\tau$ ) از آن خارج می‌شود؟

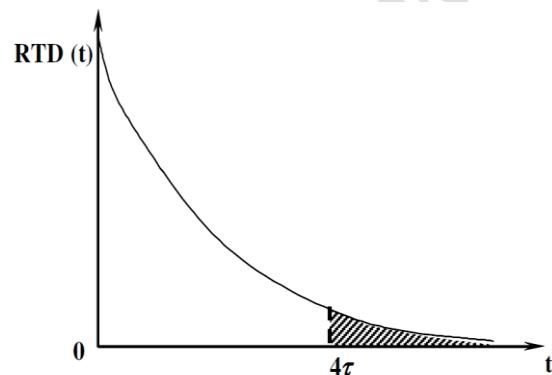
$$RTD(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow 0 < t < 4\tau \Rightarrow A = -(e^{-4} - e^0)$$

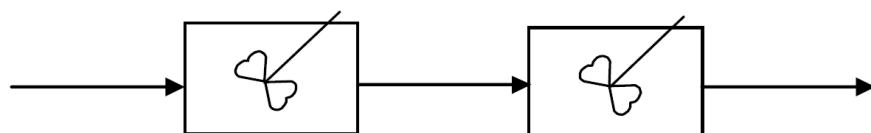
$$\Rightarrow A = 0.98$$

$$1 - 0.98 = 0.02$$

مقدار موادی که پس از  $4\tau$  از سلول خارج می‌شوند.



برای دو ظرف با اختلاط کامل پشت سر هم

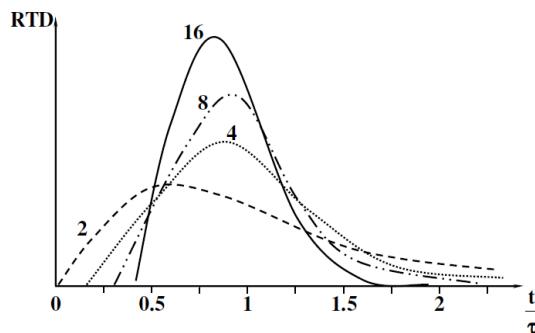


شکل 7- دو طرف واکنشی سری

$$E(t) = \frac{1}{\tau^2} \int_0^t e^{-t/\tau} dt = \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

برای N ظرف داریم :

$$E(t) = \frac{1}{\tau^N} \times \frac{t^{N-1} e^{-t/\tau}}{(N-1)!}$$



شکل 8- توزیع زمان ماند بر حسب N

## سینتیک فلوتاسیون

### مقدمه:

برای مطالعه‌ی یک واکنش، بایستی آن را از دیدگاه ترمودینامیکی و سینتیکی بررسی نمود که این مطالعات مکمل هم می‌باشد. در بررسی‌های ترمودینامیکی امکان پذیری و امکان ناپذیری فرآیندها واکنش‌ها مطالعه می‌شوند و از بررسی سینتیک یک واکنش می‌توان مکانیزم‌های انجام آن را دریافت. برخلاف ترمودینامیک که نقاط اولیه و انتهایی واکنش در مطالعه در نظر گرفته می‌شود، در مطالعات سینتیکی تمام مراحل واکنش در نظر گرفته شده و دانستن مسیر انجام واکنش ضروری است.

سرعت یک واکنش، میزان تندی و یا کندی ترکیب شدن مواد اولیه یک واکنش و یا تولید محصولات واکنش می‌باشد. برای واکنش‌هایی که در یک مرحله انجام می‌شوند ( $P = A + \beta a$ ) سرعت مناسب است با :

$$\text{سرعت} \propto |A|^{\alpha} \cdot |C|^{\beta}$$

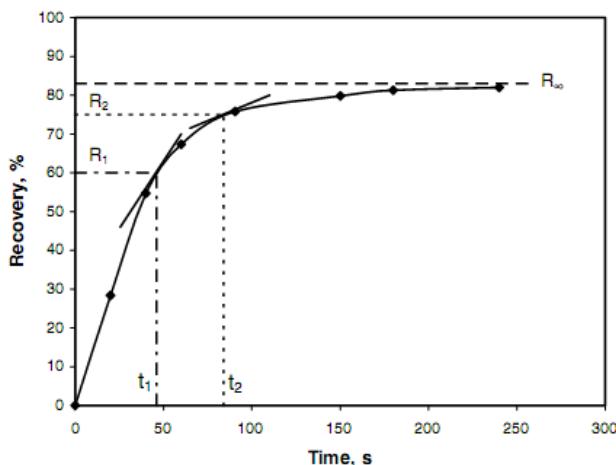
برای واکنش‌های پیچیده که طی چند مرحله انجام می‌شوند، سرعت باز هم با حاصلضرب غلظت‌ها مناسب می‌باشد، با این تفاوت که توان غلظت‌ها ارتباطی با ضرایب استوکیومتری نداشته و اعدادی که به صورت نمایی ظاهر می‌شوند، بستگی به مکانیزم واکنش دارند و به طور تجربی بیان می‌گردند. برای واکنش پیچیده  $P \rightarrow C + CaA$  مقدار سرعت برابر است با :

که مجموع  $\alpha + \beta + \gamma = n$  را مرتبه واکنش می‌نامند و اگر  $n = 0, 1, 2$  باشد، واکنش‌های مربوطه را به ترتیب مرتبه‌ی صفر، اول، دوم و سوم می‌نامند و  $k$  سرعت واکنش بر حسب عکس واحد زمان  $(1/s)$  می‌باشد.

### سینتیک فلوتاسیون

ویژگی‌های کنسانترهی حاصل از فلوتاسیون آزمایشگاهی (نایپوسته) بر حسب زمان تغییر می‌کند. به طوری که حتی کنسانترهی حاصل از سلول آخری در یک بانک فلوتاسیون پیوسته از سلول‌های ابتدایی می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. ذرات یک ماده‌ی معدنی یکسان به دلیل ویژگی‌های مختلف ذرات و شرایط سلول‌ها با نرخ‌های متفاوتی فلوته می‌شوند.

منحنی بازیابی-زمان<sup>12</sup> یک فرایند فلواتسیون ناپیوسته در شکل 9 نشان داده شده است. بازیابی هر کانی به مقدار  $R_{\infty}$  که معمولاً کمتر از 100 درصد است می‌تواند افزایش یابد که نرخ بازیابی در زمان  $t$  به وسیله‌ی شیب منحنی در زمان  $t$  مشخص می‌شود و نرخ بازیابی در زمان  $t_1$  بزرگتر از بازیابی در زمان  $t_2$  است و همواره رابطه‌ی مستقیم مابین نرخ فلواتسیون و مقدار مواد قابل فلوت بهی باقیمانده در سلول وجود دارد.



شکل 9- منحنی بازیابی-زمان فلواتسیون ناپیوسته

$$\frac{t_1}{(R_{\infty} - R_1)^n} = \frac{t_2}{(R_{\infty} - R_2)^n} = k$$

نرخ فلواتسیون  $= k * (R_{\infty} - R)^n$  پر عیار شدگی در سلول) و یا به عبارتی :

نرخ فلواتسیون مساوی با نرخ تغییر غلظت در سلول بوده و می‌توان آن را به فرم معادله‌ی دیفرانسیلی زیر در حالت کلی نوشت :

$$-\frac{dC}{dt} = kC^n$$

که در رابطه‌ی فوق  $k$  نرخ فلواتسیون،  $C$  غلظت مواد قابل شناور در سلول می‌باشند.  $n$  نیز بیانگر درجه‌ی واکنش می‌باشد.

### سینتیک فلواتسیون<sup>13</sup> (آزمایشگاهی)

<sup>12</sup> Recovery-time

<sup>13</sup> Flotation kinetics

مطالعه‌ی فلوته شدن ذرات بر حسب زمان  $t$  را مطالعه‌ی سینتیک فلوتاسیون گویند و می‌توان آن را در حالت کلی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{dC}{dt} = -kC^n$$

که علامت منفی بیانگر کم شدن غلظت مواد بر حسب زمان بوده و  $n$  درجه‌ی واکنش می‌باشد.  $K$  را نیز ثابت نرخ واکنش می‌گویند.

### سینتیک مرتبه‌ی صفر

اگر  $n$  برابر با صفر باشد به آن سینتیک مرتبه‌ی صفر گفته می‌شود. به عبارتی واکنش مستقل از مقدار اولیه‌ی آن می‌باشد و  $\frac{dC}{dt} = -kC^n = -k$  بستگی به غلظت مواد اولیه ندارد. زمانی که سلول از ذرات قابل شناور اشباع باشد، سینتیک فلوتاسیون از مرتبه‌ی صفر پیروی می‌کند.

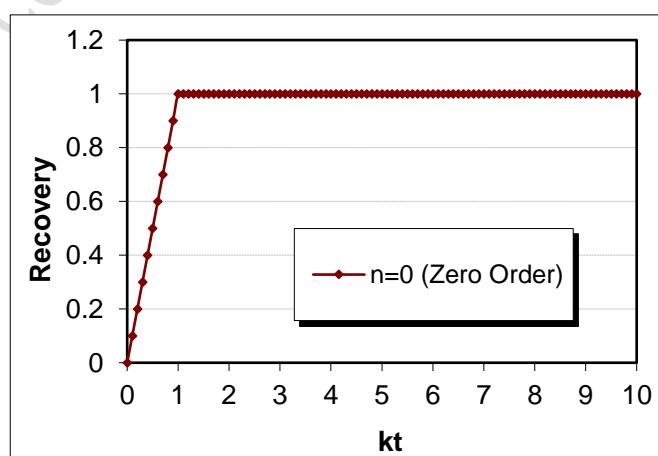
تغییرات غلظت بر حسب زمان در سینتیک فلوتاسیون با درجه‌ی صفر

$$\frac{dc}{dt} = -k \Rightarrow \int_{C_0}^{C_t} dc = \int_0^t -k dt \Rightarrow C_t = C_0 - kt$$

مقدار مواد باقی مانده در زمان  $t$  در سلول می‌باشد.

$$R = \frac{C_0 - [C_0 - kt]}{C_0} \Rightarrow R = \frac{kt}{C_0} \Rightarrow R = kt \Rightarrow k = \frac{R}{t}$$

و در نتیجه تغییرات  $R$  بر حسب  $Kt$  به صورت زیر است که در آن  $C_0$  غلظت کانی با ارزش در سلول در زمان صفر و  $C_t$  غلظت کانی با ارزش باقی مانده در سلول در زمان  $t$  می‌باشد.



شکل 10- نمودار تغییرات بازیابی در مرتبه صفر

## سینتیک مرتبه اول

اکثر دانشمندان معتقدند که سینتیک فلوتاسیون از نوع سینتیک مرتبه اول بوده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

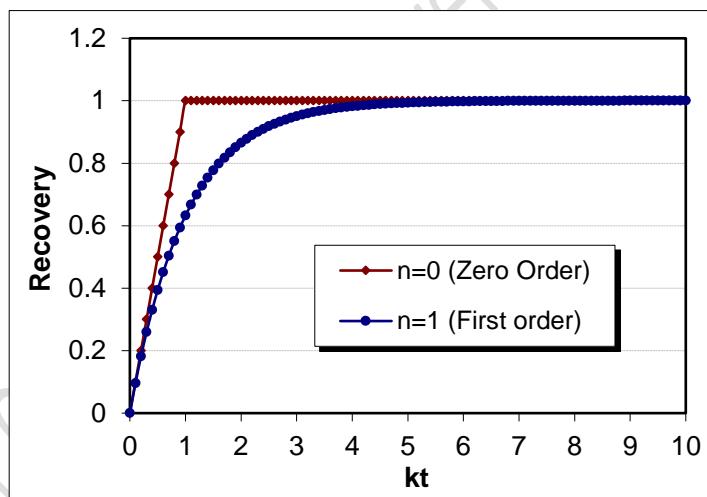
$$\frac{dc}{dt} = -kC \Rightarrow \frac{dc}{-kC} = dt \Rightarrow -\frac{1}{k} \frac{dc}{C} = dt \Rightarrow -\frac{1}{k} [\ln] \left| \frac{C_t}{C_0} \right| = (t) \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{C_t}{C_0} = -kt \Rightarrow C_t = C_0 \cdot e^{-kt}$$

که  $C_0$  و  $C_t$  علظت مواد قابل شناور در زمان  $t=0$  و  $t$  می‌باشند و  $k$  ثابت نرخ فلوتاسیون می‌باشد و از آنجا می‌توان بازیابی را محاسبه نمود:

$$R = \frac{C_0 - C_0 e^{-kt}}{C_0} \Rightarrow R = 1 - e^{-kt}$$

برای نمونه، اگر  $t=1/k$  و  $t=4/k$  باشد، به ترتیب 21/63 و 98/17 درصد مواد قابل فلوت به کنسانتره راه می‌یابند. به عبارت دیگر مابقی نمی‌توانند به بخش فلوتاسیون پر عیار یا کنسانتره راه یابند.



شکل 11- مقایسه بازیابی سینتیک مرتبه صفر و اول

در معادله  $\ln \frac{C_0}{C_t} = kt$  و یا  $\ln \frac{C_0}{C_t} = -kt$  اگر مقادیر آزمایشگاهی  $\ln \frac{C_0}{C_t}$  رسم گردد، خط راستی به دست می‌آید که شیب خط برابر با  $k$  به ازای  $n=1$  می‌باشد. از آنجاییکه بازیابی ماکزیمم بندرت 100 درصد می‌باشد می‌توان گفت که اگر علظت کانی با ارزش باقیمانده در سلول پس از زمان فلوتاسیون خیلی زیاد ( $t_{\infty}$ ) برابر با  $C_{\infty}$  باشد، معادله  $\ln \frac{C_0}{C(t)} = kt$  را به طور صحیح تر می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ln \left( \frac{C_0 - (\infty)}{C_t - C_{\infty}} \right) = Kt \quad (1)$$

$$R = \frac{C_0 - C_t}{C_0}, \quad R(\infty) = \left( \frac{C_0 - C_\infty}{C_0} \right) \Rightarrow \frac{R}{R_\infty} = \left( \frac{C_0 - C_t}{C_0 - C_\infty} \right)$$

$$\Rightarrow R = R_\infty \left( \frac{C_0 - C_t}{C_0 - C_\infty} \right) \quad (2)$$

بر اساس رابطه ۱) و می توان نتیجه گرفت که (معکوس و کسر از واحد)

$$\frac{C_0 - C_t}{C_0 - C_\infty} = e^{kt} \Rightarrow 1 - \left( \frac{C_t - C_\infty}{C_0 - C_\infty} \right) = 1 - e^{-kt} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{C_0 - C_\infty - C_t + C_\infty}{C_0 - C_\infty} \right) = \left( \frac{C_0 - C_t}{C_0 - C_\infty} \right) = 1 - e^{-kt} \quad (3)$$

با جایگزینی رابطه ۳ در ۲ می توان نوشت که :

$$R = R_\infty (1 - e^{-kt})$$

لازم به ذکر است که در به دست آوردن این معادله فرض شده است که فقط متغیرهای مستقل غلظت کانی قابل شناور تغییر می کند و بقیه پارامترها ثابت نگه داشته می شوند. زمانیکه سایر متغیرها ثابت نباشند، می توان رابطه زیر را در حالت کلی نوشت :

$$-\frac{dc}{dt} = K \prod C_i^{n_i}$$

که  $C_i$  غلظت هر جزئی است که می تواند نرخ فلوتاسیون ذرهی مورد نظر را متأثر سازد،

$n_i$  درجه ی واکنش (درجه ی معادله) با در نظر گرفتن  $C_i$ .

برای مثال  $C_i$  می تواند غلظت اجزای قابل شناور، هوا، گانگ و مواد شیمیایی باشد.

ممکن است برای یک آزمایش فلوتاسیون غلظت مواد شیمیایی ثابت فرض شود که در این حالت می توان نوشت :

$$-\frac{dc}{dt} = KC_s^m C_A^n$$

که در اینجا  $C_s$  و  $C_A$  غلظت اجزای قابل شناور و حباب های هوا می باشند. بنابراین در چنین مواردی  $K$  تابع ترکیبی بوده و تحت تاثیر عواملی نظیر غلظت مواد شیمیایی مورد استفاده، اندازه ذرات و حباب ها، طرح سلول، نرخ جمع آوری کف، آماده سازی اولیه و ... می باشد. در یک فرایند آزمایشگاهی، پارامترهای فوق معمولا در یک سطح قابل قبولی ثابت نگه داشته می شوند و با تغییر  $C_s$  و  $C_A$  مقادیر  $m$  و  $n$  ارزیابی و تخمین زده می شوند.

سینتیک مرتبه ۵

برای سینتیک مرحله‌ی 2 ( $n=2$ ) بوده و از معادله‌ی کلی سینتیک می‌توان این نتیجه را گرفت که:

$$\begin{aligned} - \int_{C_0}^{C_t} \frac{dc}{c^2} &= K \int_{t=0}^{t=t} dt \Rightarrow \left[ \frac{1}{c} \right] \Big|_{C_0}^{C_t} = Kt \Rightarrow \frac{1}{C_t} - \frac{1}{C_0} = Kt \\ \Rightarrow \frac{C_0}{(1+C_0 Kt)} &\Rightarrow \frac{C_0}{C_t} = 1 + C_0 Kt \quad (1) \end{aligned}$$

همچنین برای بازیابی ماکریم  $R_\infty$  کمتر از 100 درصد می‌توان رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= -K(C - C_\infty)^2 \\ \Rightarrow C_t &= \frac{C_0 + C_\infty (C_0 - C_\infty) Kt}{1 + (C_0 + C_\infty) Kt} \quad (2) \end{aligned}$$

همواره بهتر است که مقادیر بر حسب مقدار مواد قابل شناور کار شود تا کل مواد. لذا همواره مقادیر  $R_\infty$  و  $C_\infty$  در فرمول‌ها در نظر گرفته می‌شوند. رابطه‌ی (1) را می‌توان به صورت زیر جهت ترسیم منحنی‌ها در آورد:

$$\frac{C_0 - C_\infty}{C_t - C_\infty} = 1 + (C_0 - C_\infty) Kt$$

و با رسم مقادیر  $\frac{C_0 - C_\infty}{C_t - C_\infty}$  بر حسب زمان  $t$  خط راستی به ازای  $n=2$  حاصل می‌شود.

معادله‌ی مشابهی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= K(R_\infty - R)^2 \Rightarrow R = \frac{R_\infty^2 K t}{1 + R_\infty K t} \\ \Rightarrow \frac{t}{R} &= \frac{1}{R_\infty^2 K} + \frac{t}{R_\infty} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{KR_\infty^2}{R} - KR_\infty \end{aligned}$$

برای تشخیص سینتیک درجه‌ی دو به روش ترسیمی، داده‌هایی برای زمان‌های خیلی کوتاه فلوتاسیون مورد نیاز می‌باشد.

مثال) نمونه‌ای از ماده‌ی معدنی زغال در یک سلوول کوچک آزمایشگاهی با استفاده از کلکتور نفت ( $H_1$ ) و کلکتور دی‌تیوفسفات با نفت ( $DP+H_1$ ) فلوته می‌شود. کنسانتره‌ی حاصل از آزمایشات فلوتاسیون به فواصل زمانی 5 دقیقه تا 3 دقیقه جمع‌آوری و سپس یک کنسانتره‌ی نهایی در دقیقه‌ی 7 جمع‌آوری گردیده است. کنسانتره‌ی مورد نظر پس از خشک کردن وزن شده و سپس عیارسنجدی گردیده‌اند که نتایج حاصله در جدول زیر داده شده است. با توجه به داده‌های موجود در جدول زیر ثابت فلوتاسیون را برای فلوتاسیون با دو کلکتور استفاده شده  $H_1$  و  $DP$  محاسبه کنید. (حجم سلوول 250 میلی لیتر است).

زمان(دقیقه)	کلکتور H <sub>1</sub>		کلکتور DP+H <sub>1</sub>	
	وزن (گرم)	خاکستر	وزن (گرم)	خاکستر
0	461/8	58/5	456/4	58/7
0/5	43/6	13/2	56/5	21/2
1	18/3	15/1	30/9	26
1/5	11/9	16/1	30/3	25/7
2	10/3	14/7	23/6	26/8
2/5	5/4	15	17/3	28/6
3	4/7	13/7	13/3	27/3
7/0	17/5	12/8	21/1	31
باطله	350/1	72/6	263/3	83/1

حل:

کنسانتره  $H_1$  را ابتدا در نظر گرفته و غلظت (تمرکز) زغال را در سلول به دست می آوریم :

اگر فرض کنیم  $\text{Coal} = \% \text{ Ash} - 100$  (همیشه درست نیست و در این مثال برای سادگی در نظر گرفته شده است)

$$C_0 = \frac{\text{وزن زغال در خوراک}}{\text{حجم سلول}} = \frac{491.8 \times (100 - 58.5)}{250 \times 100} = 0.767 \text{ g/ml}$$

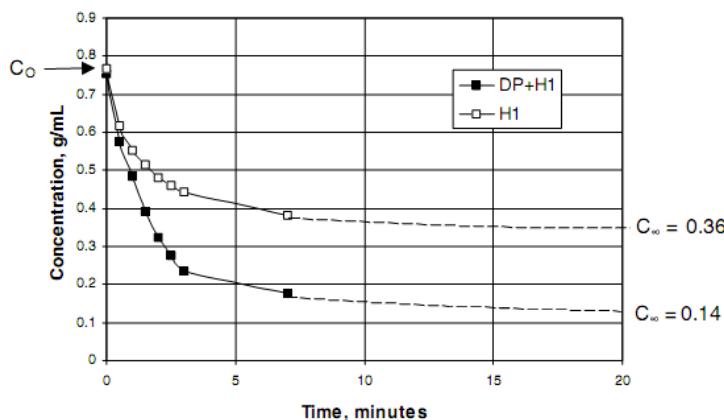
غلظت زغال باقی مانده در سلول پس از 5 دقیقه اول برابر خواهد بود با :

$$C = \frac{[461.8 \times (100 - 58.5)] - [43.6 \times (100 - 13.2)]}{250 \times 100} = 0.615 \text{ g/ml}$$

و اگر به همین ترتیب برای بقیه فواصل زمانی مقدار زغال موجود در سلول محاسبه شود برای دو کنسانتره  $H_1$  و  $DP+H_1$  می توان به نتایج خلاصه شده در جدول زیر دست یافت :

time	H <sub>1</sub> (g/ml)	(DP+H <sub>1</sub> )g/ml
0	0.767	0.753
0.5	0.615	0.575
1	0.554	0.484
1.5	0.514	0.394
2	0.479	0.325
2.5	0.461	0.275
3	0.444	0.236
7.0	0.383	0.178

در مرحله‌ی بعدی با استی  $C_{\infty}$  را محاسبه نمود. پس با رسم منحنی زیر برای دو کنسانتره‌ی دست آمده از روی منحنی‌ها  $C_{\infty}$  برای دو کنسانتره‌ی H1 و DP+H1 به ترتیب  $0/36$  و  $0/14$  تخمین زده می‌شود.



شکل 12- غلظت زغال در سلول بر حسب زمان و تخمین  $C_{\infty}$  آنها

حال می‌توان نسبت غلظت‌ها را محاسبه نمود. برای نمونه برای کنسانتره‌ی H1 می‌توان گفت که در زمان  $t=0.5\text{ min}$

$$\frac{C_0 - C_{\infty}}{C - C_{\infty}} = \frac{0.767 - 0.36}{0.615 - 0.36} = 1.6 \Rightarrow \ln \left[ \frac{C_0 - C_{\infty}}{C - C_{\infty}} \right] = \ln(1.6) = 0.47$$

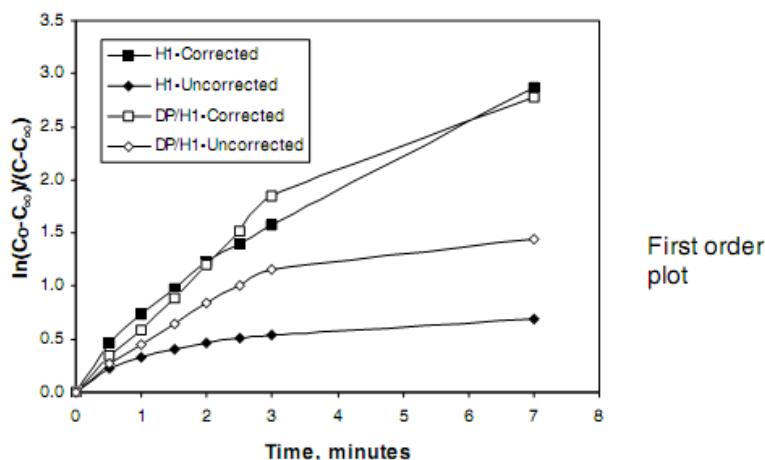
و با تکرار محاسبات فوق برای بقیه‌ی موارد می‌توان نتایج زیر را به دست آورد.

time	$\frac{C_0 - C_{\infty}}{C - C_{\infty}}$	$\ln \left[ \frac{C_0 - C_{\infty}}{C - C_{\infty}} \right]$	$/CC_0$	$\ln(C_0/C)$
0	1	0	1	0
0.5	1.6	0.47	1.25	0.22
1	2.1	0.74	1.39	0.33
1.5	2.64	0.97	1.49	0.4
2	3.42	1.23	1.6	0.47
2.5	4.05	1.40	1.67	0.51
3	4.84	1.58	1.73	0.55
7.0	17.64	2.87	2	0.69

با رسم معادله‌ی سینتیکی درجه‌ی اول (ستون 1) بر حسب و (3) معادله‌ی خط راستی حاصل می‌شود که شبیه آن برابر با  $K$  می‌باشد. و برای درجه‌ی دوم (ستون 2) در مقابل ستون 1) نیز خط راستی حاصل می‌شود که شبیه

خط برابر با  $\frac{C_0 - C_{\infty}}{K}$  می‌باشد.

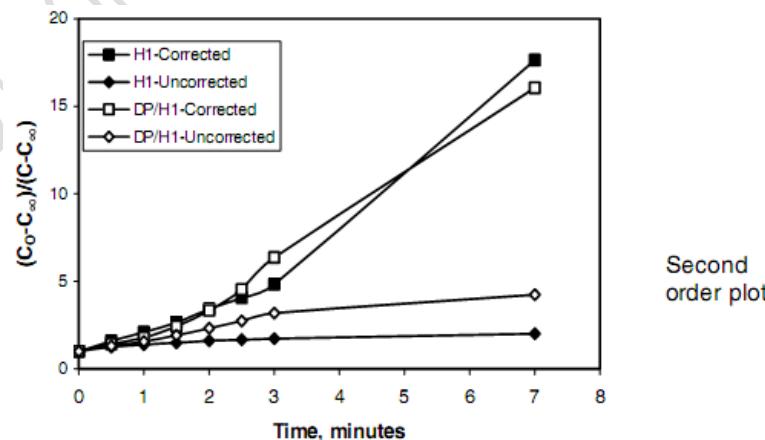




شکل 13- منحنی سینتیکی درجه‌ی اول بدون تصحیح و با تصحیح نسبت به غلظت زغال در سلول در زمان بی‌نهایت

واضح است که بر طبق منحنی‌های بدون تصحیح، ثابت نرخ واکنش برای حالت  $(DP+H_1)$  تقریباً دو برابر  $H_1$  است. ولی پس از تصحیح نسبت به زغال غیر قابل شناور(محتوی زغال در سلول پر، از زمان بینهایت) نرخ ثابت واکنش برای دو حالت تقریباً یکسان به دست می‌آید. بنابراین همواره مهم است که در محاسبه‌ی نرخ ثابت واکنش مواد قابل شناور را در نظر گرفت.

استفاده از دو نوع کلکتور تاثیر چندانی بر روی نرخ فلواتیون نداشت و لی تاثیر آن بر روی بازیابی در زمان بینهایت که به ترتیب برابر با 80 و 53 درصد برای  $(DP+H_1)$  و  $H_1$  باشد، قابل توجه است. به همین ترتیب تاثیر غلظت تصحیح شده ونشده بر روی معادله‌ی سینتیکی درجه‌ی 2 منجر به خط راست کامل نشده و با ضریب همبستگی منحنی‌ها حدود 0/87 و 0/94 می‌باشد.



شکل 14- معادله‌ی سینتیکی درجه‌ی 2

با استفاده از رگرسیون نتایج موجود در شکل‌ها، نتایج زیر به دست می‌آید:

با استفاده از معادله‌ی درجه‌ی 1

$$K_{H1} = \text{Slope} = 0.4628 \text{ min}^{-1}$$

$$K(H_1+DP) = \text{Slope} = 0.4632 \text{ min}^{-1}$$

و با استفاده از معادله‌ی درجه‌ی 2

$$K_{H1} = \frac{\text{شیب}}{C_0 - C_\infty} = \frac{2.011}{0.767 - 0.36} = 4.94 \text{ min}^{-1}$$

$$K(H_1+DP) = \frac{\text{شیب}}{C_0 - C_\infty} = \frac{1.9237}{0.753 - 0.14} = 3.14 \text{ min}^{-1}$$

### معادله‌ی سینتیکی با درجه‌ی غیر انتگرالی

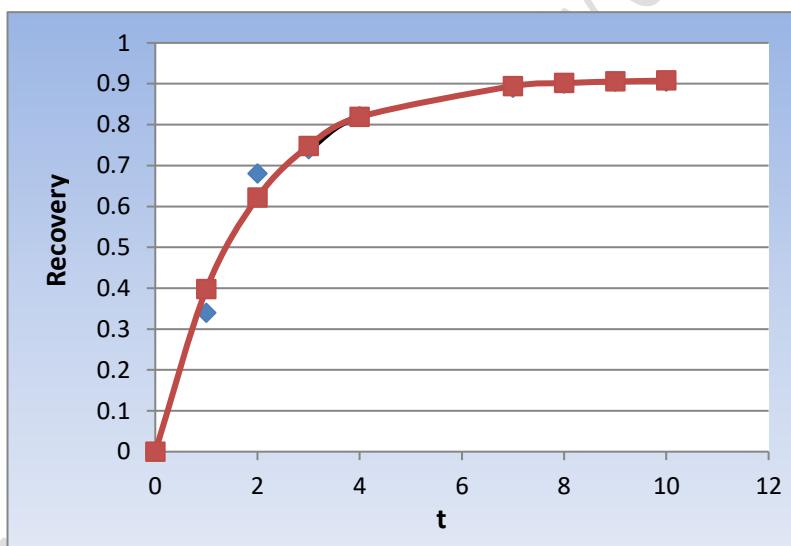
در حالت کلی معادله‌ی نرخ واکنش را می‌توان مابین درجه‌ی 1 و درجه‌ی 2 در نظر گرفت که معمولاً در فلواتسیون تک کانی‌ها و یا در فلواتسیون با پالپ‌های خیلی رقیق به درجه‌ی یک نزدیک شده و در فلواتسیون کانسنگ‌های کم عیار و یا در پالپ‌های غلیظ به درجه‌ی 2 نزدیک می‌شود. در این حالت می‌توان نوشت:

$$K^i t = \frac{\frac{R^i}{R^i_\infty}}{1 - \left(\frac{R^i}{R^i_\infty}\right)} \times \left[ 1 - \frac{R^i_\infty}{R^i} \right] - \left( \frac{R^i_\infty}{R^i} \right) \ln \left( 1 - \frac{R^i}{R^i_\infty} \right)$$

که  $R^\infty$  کل کانی‌های موجود همه‌ی ذرات آمی باشد. زمانیکه یک کانی دخالت داشته باشد و یا نسبت جامد به سیال خیلی کم باشد ( $R^i_\infty = R^\infty$ ) معادله‌ی فوق به معادله‌ی نرخ واکنش درجه‌ی 1 ساده می‌شود و زمانی که  $R < R^i$  باشد، معادله‌ی مذکور به فرم معادله‌ی نرخ واکنش درجه‌ی 2 ساده می‌شود.

برای حل معادله‌ی بازیابی، بازیابی بر اساس آزمایش‌های انجام گرفته مشخص می‌شوند. در آزمایش‌ها جمع-آوری کنسانتره در زمان‌های مختلف تا شناور شدن همه‌ی مواد آبران صورت می‌گیرد. پس از آن می‌توان با فرض  $R^\infty$  برای هر زمان،  $R$  را محاسبه کرد. با سیستم سازی مجموع مربع تفاضلات (با استفاده از تابع Solver) می‌توان  $R$  و  $K$  بهینه را به دست آورد.

t	R Experimental	R Calculated	(Rexp.-Rcal.) <sup>2</sup>	Best values of R and k using
				Solver Function (Minimization)
0	0	0.000	0.000	
1	0.34	0.398	0.0033	R=0.910768
2	0.68	0.622	0.0034	K=0.573701
3	0.74	0.748	0.00016	
4	0.82	0.819	0.0000	
7	0.89	0.894	0.0000	
8	0.9	0.902	0.0000	
9	0.905	0.906	0.0000	
10	0.905	0.908	0.0000	
Total			0.00681	



### معادله‌ی سینتیک و بازیابی برای عملیات پیوسته

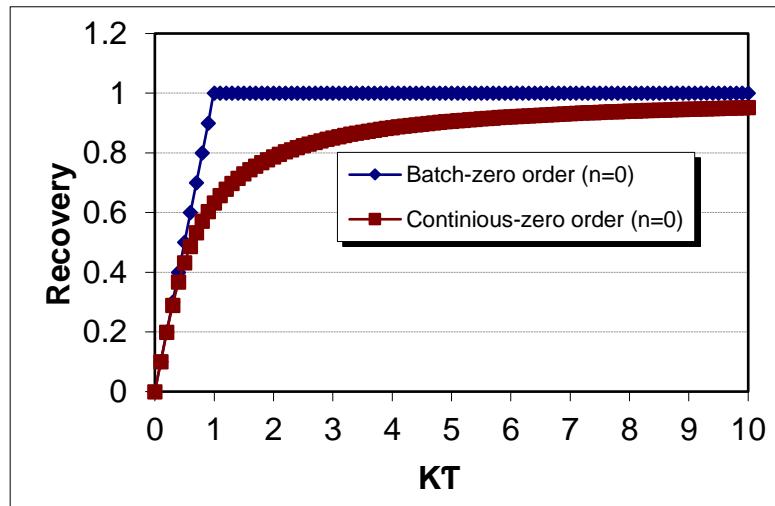
با توجه به این که در عملیات پیوسته، زمان ماند ذرات تفاوت دارند، بنابراین زمان ماند باقیستی در معادلات سینتیکی در نظر گرفته شود.

برای عملیات سینتیک با مرتبه‌ی صفر در عملیات ناپیوسته،  $R=Kt$  می‌باشد. در عملیات پیوسته بازیابی برابر است با:

$$R = \int_0^\infty R_t RTD dt = \int_0^\infty Kt \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$\Rightarrow R = \int_0^\infty K \frac{t}{\tau e^{-\frac{t}{\tau}}} dt = K\tau \left( 1 - e^{-\frac{1}{K\tau}} \right)$$

$$R = K\tau \left( 1 - e^{-\frac{1}{K\tau}} \right)$$



شکل 15- مقایسه بازیابی مرتبه صفر و اول

علت کاهش بازیابی در عملیات پیوسته در مرتبه صفر به دلیل کاهش بخشی از حجم سلول فلوتاسیون با موادی است که قبلاً در واکنش شرکت نموده‌اند. برای عملیات پیوسته با درجهٔ سینتیکی درجهٔ 1 می‌توان نوشت  $R=1-e^{-Kt}$  و برای مقدار مواد بازیابی نشده در عملیات پیوسته می‌توان گفت:

$$R'=1-R=1-1+e^{-kt}$$

$$R'=e^{-Kt}$$

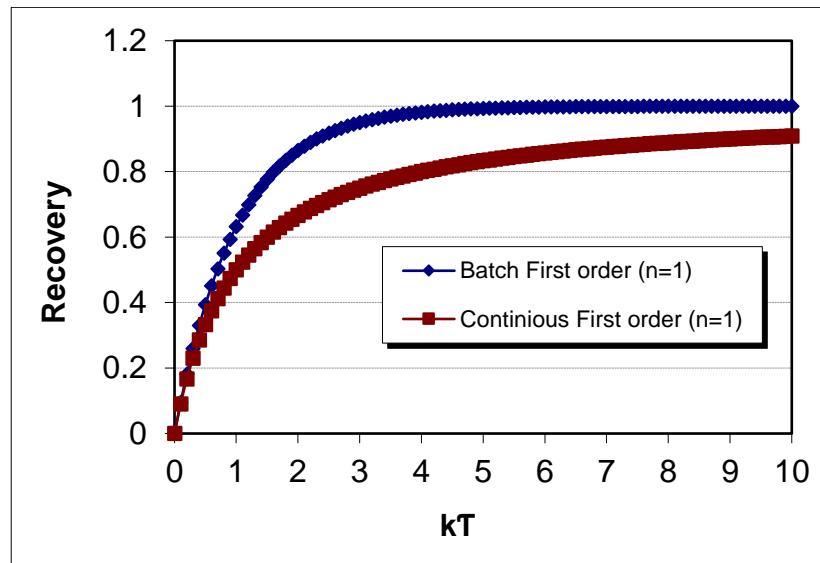
در عملیات پیوسته می‌توان مقدار  $R'$  در عملیات پیوسته را از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$R'=\int_0^{\infty} e^{-kt} \times \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{1}{\tau \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau}+k)t} dt} = \frac{1}{k\tau+1}$$

$$R'=1/k\tau+1$$

از آنجاییکه  $R'+R=1$  می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$R=1-R'=1-\frac{1}{k\tau+1} = \frac{\tau k}{1+k\tau}$$



شکل 16- مقایسه سینیتیک واکنش مرتبه اول برای فرایند های پیوسته و ناپیوسته

اگر بازیابی عملیات پیوسته و ناپیوسته را مساوی هم قرار دهیم، می توان نوشت:

$$R_c = R_{DC} \Rightarrow 1 - e^{-kt} = \frac{kt}{1+kt} \Rightarrow \tau = \left( \frac{e^{kt}-1}{k} \right) \Rightarrow \frac{\tau}{t} = \frac{e^{kt}-1}{kt}$$

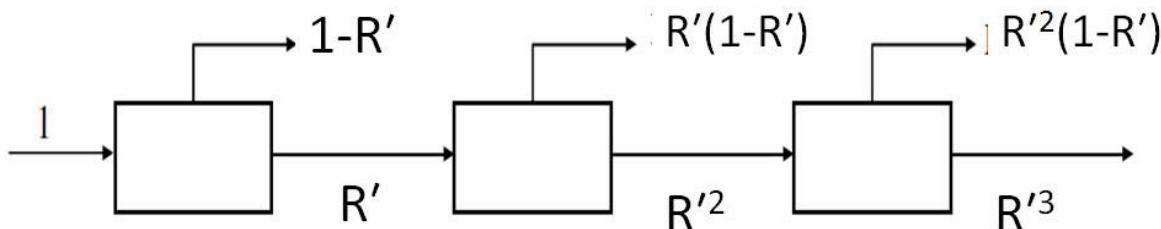
جدول زیر، مقادیر  $t/\tau$  را به ازای مقادیر مختلف بازیابی غیر پیوسته نشان می دهد. همان طور که دیده می شود زمان لازم برای فلوتاسیون در مقیاس پیوسته چند برابر زمان آزمایشگاهی است.

بازیابی ناپیوسته در زمان t	kt	$\tau/t$
0.85	1.9	3
0.90	2.30	3.9
0.92	2.53	4.6
0.95	3	6.3

اگر برای رسیدن به بازیابی 92 درصد در مقیاس آزمایشگاهی به 8 دقیقه فلوتاسیون مورد نیاز باشد، برای بازیابی مشابه در یک سلول پیوسته به 4.6 برابر آن یعنی 37 دقیقه زمان فلوتاسیون لازم می باشد. این افزایش زمان فلوتاسیون در سلول های پیوسته، با کاهش کارایی سیستم به علت توزیع زمان ماند در شرایط اختلاط کامل همراه می باشد. این کمبود را می توان با استفاده از سلول های متعدد با زمان توقف مشابه که به طور سری قرار گرفته اند جبران نمود.

اگر n سلول مشابه به طور سری قرار گیرند، تا زمانی که k ثابت بماند بازیابی کل را می توان به روش زیر به دست آورد:

اگر چندین سلول سری را که تحت عنوان بانک فلواتسیون در اکثر مدارهای صنعتی و پیوسته به کار برده می‌شوند، در نظر بگیرید و  $R'$  کسری از مواد باشد که در سلول بازیابی نمی‌شود و برای همه‌ی سلول‌ها یکسان باشد، داریم:



مقدار مواد بازیابی شده پس از  $n$  سلول:

$$R'^n \Rightarrow R = 1 - R'^n$$

$R$  مقدار مواد بازیابی شده پس از  $n$  سلول می‌باشد. پس مقدار ماده‌ی بازیابی شده در سلول  $n$  ام برابر است با اختلاف مواد بازیابی نشده در سلول  $1-n$  و

$$R' = \frac{\tau k}{1+k\tau}$$

$$\begin{aligned} R_n &= R'_{n-1} - R'_n = \left(\frac{1}{1+k\tau}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{1+k\tau}\right)^n \\ \Rightarrow R_n &= \left(\frac{1}{1+k\tau}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{1+k\tau}\right] = \left(\frac{1}{1+k\tau}\right)^{n-1} \left(\frac{k\tau}{1+k\tau}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{\tau k}{(1+k\tau)^n}$$

مقدار ماده‌ی بازیابی شده در  $n$  ام  
سلول

در این حالت اگر بازیابی مدار پیوسته و ناپیوسته را مساوی هم قرار دهیم می‌توان نوشت:

$$R_c = R_{DC} \Rightarrow 1 - e^{-kt} = \frac{k\tau}{(1+k\tau)^n}$$

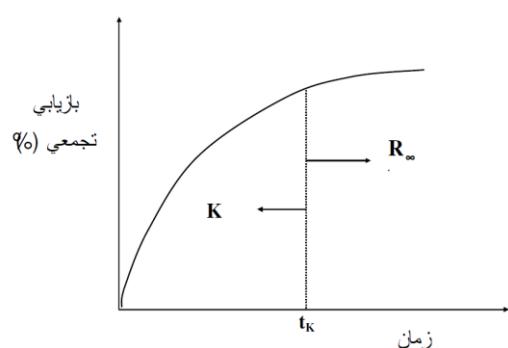
برای یک بازیابی معین در مقیاس آزمایشگاهی  $R_{DC}=90\%$   $n$  را به ازای مقادیر ثابت  $kt=2.3$  محاسبه نمود.

سلول $n$	$Kt=2.3$	$\tau/t$
1	2.3	3.9
2	2.3	1.9
3	2.3	1.5
5	2.3	1.3
7	2.3	1.2

جدول فوق نشان می‌دهد که کل زمان ماند برای دستیابی به بازیابی لازم، با افزایش تعداد سلول‌ها کاهش می‌یابد.

### بیینه سازی مدارهای فلوتاسیون بر اساس بازیابی

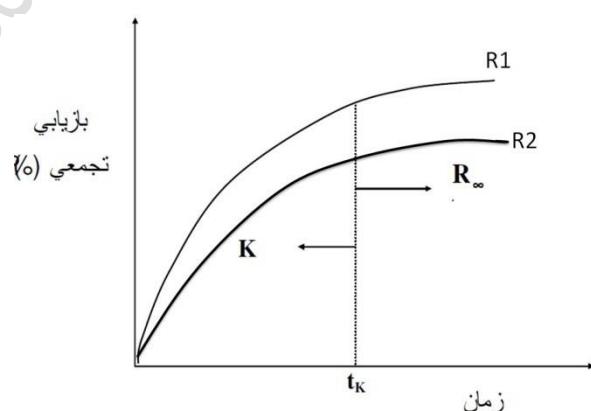
مطالعه‌ی تاثیر عوامل مختلف بر روی فرایندهای فلوتاسیون معمولاً به واسطه‌ی بازیابی انجام می‌شود. برای نمونه می‌توان تاثیر زمان فلوتاسیون را با نمونه برداری از فرآیند فلوتاسیون از فواصل زمانی انجام داد. اما ذکر این نکته حائز اهمیت است که بخش‌های مختلف فرآیند فلوتاسیون صرفاً بر اساس بازیابی ممکن است با نتایج واقعی مطابقت و یا سازگاری نداشته باشد. برای نمونه شکل زیر را که در اثر مطالعه‌ی اثر زمان ماند بر روی فلوتاسیون به دست آمده است را در نظر بگیرید.



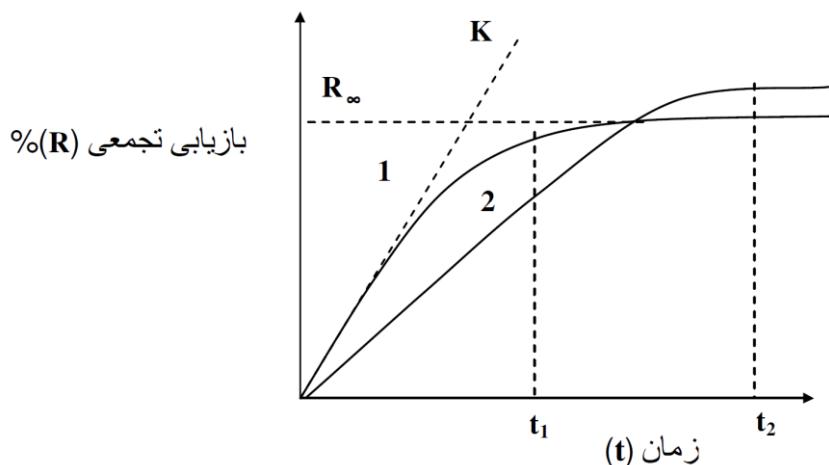
اگر معادله‌ی سینتیک را درجه‌ی اول فرض کنید، قسمتی از منحنی به واسطه‌ی ثابت واکنش  $R_{\infty}$  زمان طولانی و قسمتی از آن توسط نرخ شناور شدن ( $k$ ) مشخص می‌شود.

$$R_t = R_{\infty}(1 - e^{-kt})$$

حال فرض کنید که در اثر تغییر فرآیند در دو آزمایش برای مطالعه دو منحنی زیر حاصل شده است.



با توجه به این که تغییرات انجام گرفته در حالت ۱ هم بازیابی در زمان طولانی ( $R_{\infty}$ ) و هم ثابت شناور شدن بالایی دارد، پس حالت ۱ بهتر بوده و تغییر صورت گرفته مثبت می‌باشد. اما اگر نتایج به صورت زیر در بیانند در این حالت تصمیم‌گیری و نتیجه‌گیری به راحتی امکان‌پذیر نیست.



اگر در فرایند صنعتی، زمان ماند از  $t_x$  بیشتر باشد، حالت اول بهتر است و اگر زمان ماند از  $t_x$  کمتر باشد، کنترل به واسطه  $k$  صورت می‌گیرد و فرایند ۲ بهتر است. اگر به زمان ماند صنعتی توجهی نداشته باشیم، ممکن است تفسیر غلطی انجام گیرد و مطابقت داده‌های آزمایشگاهی با صنعتی به جواب اشتباهی منجر شود.